

MATHEMATICA

DE SOLIDORUM ELEMENTIS

EXCERPTA EX MANUSCRIPTIS CARTESII

(I)

Angulus solidus rectus est qui octavam spheræ
5 partem complectitur, etiam si non constet ex tribus
angulis planis rectis. Omnes autem anguli plani, ex
quibus circumscribitur, simul sumti, æquales sunt
tribus rectis.

Sicut in figurâ planâ omnes anguli externi, simul
10 sumti, æquales sunt quatuor rectis : ita in corpore
solido omnes anguli solidi externi, simul sumti,
æquales sunt octo solidis rectis. Per angulum exter-
num intelligo curvaturam & inclinationem planorum
ad invicem, quam metiri oportet ex angulis planis
15 angulum solidum comprehendentibus. Nam illa pars
quâ aggregatum ex omnibus angulis planis vnum
angulum solidum facientibus, minus est quàm quatuor
anguli recti planum < facientes >^a, designat angulum
externum solidum.

20 Si quatuor anguli plani recti ducantur per nume-

a. MS. : < facientes > manque, suppléé déjà, *Revue de l'Instr. publ.*, 1^{er} nov. 1860, p. 484, col. 3, note 4.

rum angulorum solidorum & ex producto tollantur 8 anguli recti plani, remanet aggregatum ex omnibus angulis planis qui in superficie talis corporis solidi existunt.

In pyramide, | sunt semper tot facies quot anguli. In 5
columnâ, media pars numeri angulorum solidorum minor est binario quàm numerus facierum. In pyramide duplicatâ, media pars numeri facierum minor est binario quàm numerus angulorum. Sunt & alia 10
corpora, in quibus licet duo extrema imaginari & plures zonas. Sunt ad minimum triplo plures anguli plani quàm solidi in vno corpore. Si tollatur binarius ex numero angulorum solidorum qui in corpore aliquo continetur, & residuum ducatur per binarium, fit maximus numerus facierum. Si verò dividatur nume- 15
rus angulorum per binarium (si quidem sit numerus par; sin minus, illi prius addenda erit vnitas, vt dividi possit^a) ac postea quotienti addatur binarius, erit^b numerus minor facierum. Est maxima reciprocatio inter facies & angulos solidos. Pyramides omnes æqui- 20
lateræ in spherâ describuntur. Coni rectanguli, cuius^c scilicet altitudo æquatur femi-diametro basis, superficies convexa se habet ad basin vt $\sqrt{2}$ ad vnitatem, quemadmodum lineæ simplices.

Sic demonstratur non plura esse quàm 5 corpora 25
regularia: quia, si ponatur α pro numero angulorum solidorum, & 1 2 $\mathcal{Q}$ pro numero facierum, debet dividi posse $\frac{2\alpha-4}{1\ 2\mathcal{Q}}$ & $\frac{2\ 2\mathcal{Q}-4}{1\ \alpha}$, ita vt nulla occurrat fractio;

a. Les signes de parenthèse (*si... possit*) ne se trouvent pas dans le MS.

b. MS. : *eritque*.

c. MS. : *cujus cujus scilicet*.

alioquin enim certum & evidens est, corpus regulare esse non posse. Hoc autem inveniri tantum potest, si α sit 4, 6, 8, 12, 20, & pariter 12α sit 4, 8, 6, 20, 12 : unde generantur 5 corpora regularia.

5 Rhomboides omnes & pyramides sphaeram circumscribunt.

Vt cognoscamus utrum aliquod corpus solidum possit in sphaera describi, primo sciendum est omnes ejus facies necessario in circulo describi posse. Quo
10 posito, si tres anguli unius faciei aequaliter distent a centro sphaerae, certum erit etiam alios omnes ejusdem faciei aequaliter a centro sphaerae distare; ac insuper ex consequenti, angulos omnes vicinarum facierum, qui simul concurrunt cum illis prioris faciei in iisdem
15 angulis solidis.

Dato aggregato ex omnibus angulis planis qui in superficie alicujus corporis solidi existunt, invenire quot in eodem corpore solidi anguli existant. Addantur
20 8 numero dato, & productum dividatur per 4 : residuum erit numerus quaesitus, ubi si fractio occurrat, certum est nullum tale corpus esse posse.

Dato aggregato ex omnibus angulis planis & numero facierum, numerum angulorum planorum invenire. Ducatur numerus facierum per 4, & productum addatur aggregato ex omnibus angulis
25 planis : & totius media pars erit numerus angulorum planorum. V. g., aggregatum ex omnibus angulis planis est 72, numerus facierum 12, cujus quadruplum 48 additum cum 72 facit 120, cujus media pars est 60 :
30 ergo in tali corpore sunt 60 anguli plani.

Sunt semper duplo plures anguli plani in superficie

corporis solidi, quàm latera ; vnum enim latus semper commune est duobus faciebus.

Si omnes facies dicantur æqualem numerum planorum^a continere, ergo numerus angulorum dividi poterit per numerum facierum sine fractione, & quotiens
5
erit numerus angulorum vnius faciei. Hinc facile cognoscetur, ex numero angulorum planorum & numero facierum solum cognitis, quot anguli in vnâ facie esse debeant. V. g., si sint 5 facies & 18 anguli plani, ergo
10
ex illis faciebus vel 2 erunt triangulares & 3 quadratæ, vel 3 triangulares, vna quadrata & altera pentagona, vel denique vna hexagona & 4 triangulares. Sed quia in eodem corpore sunt 6 anguli solidi, hinc non potest vllum tale corpus existere, nisi cujus sint...^b.

Triplicem aduerto in angulis solidis æqualitatem aut
15
inæqualitatem : æquales dicuntur qui æquali numero angulorum planorum comprehenduntur ; æquales item, qui æqualem inclinationem continent, quo casu dicemus angulos externos sive inclinationis < æquales
20
esse^c >, & priores dicemus æquales arithmeticè ; ac denique maximè propriè æquales dicuntur, qui eandem partem sphæræ comprehendunt, & dicentur capacitate æquales.

a. Suppléer « *angulorum planorum* », comme l. 7 ci-après.

b. Sic : « sint... » (MS.) E. Prouhet suppléait, dans sa traduction : « à moins qu'il n'y ait deux faces triangulaires et trois carrées ». (*Revue de l'Instr. publ.*, 1^{er} nov. 1860, p. 485.) Ernest de Jonquières, dans son rétablissement du texte : « 3 (*sic*) triangulares & 3 quadratæ facies ». (*Écrit posthume de Descartes*, Paris, Firmin-Didot, 1890, p. 11.) Le premier 3 est manifestement une faute d'impression pour 2.

c. L'addition < æquales esse > manque dans le MS. Elle est suppléée à la fois par E. Prouhet et par E. de Jonquières. (Voir mêmes endroits que dans la note précédente.)

Angulorum solidorum inclinatione æqualium|hac
capacitate major est, qui arithmeticè exuperat ; &
omnium capacissimus est angulus coni.

Ponam semper pro numero angulorum solidorum α
5 & pro numero facierum φ . Aggregatum ex omnibus
angulis planis est $4\alpha - 8$, & numerus φ est $2\alpha - 4$, si
numerentur tot facies quot possunt esse triangula.
Numerus item angulorum planorum est $6\alpha - 12$, nume-
rando scilicet vnum angulum pro tertiâ parte duorum
10 rectorum. Nunc si ponam 3α pro tribus angulis planis
qui ad minimum requiruntur vt componant vnum
angulum angulorum solidorum, supersunt $3\alpha - 12$,
quæ summa addi debet singulis angulis solidis juxta
tenorem quæstionis, ita vt æqualiter omni ex parte
15 diffundantur. Numerus verorum angulorum planorum
est $2\varphi + 2\alpha - 4$, qui non debet esse major quàm $6\alpha - 12$; sed si minor est, excessus erit $+ 4\alpha - 8 - 2\varphi$.

Describi possunt & rhomboides in sphærâ cujus-
cumque quantitatis, sed non æquilateræ.

20

(II)

Omnia^a optime formabuntur solida per gnomones
superadditos vno semper angulo vacuo existente, ac
deinde totam figuram resolvi posse in triangula. Vnde
facile agnoscitur omnium polygonalium pondera
25 haberi ex multipli|catione trigonalium per numeros
 $2, 3, 4, 5, 6$, &c., & ex producto si tollantur $1, 2, 3, 4$,
radices, &c.

a. Dans le MS. aucune séparation n'existe entre ce nouveau dévelop-
pement et celui qui précède. Nous ajoutons (II), comme (I), p. 265.

Vt tetragonalium pondus fit, ex $\frac{1}{2} \text{ } \mathfrak{Z} + \frac{1}{2} \text{ } \mathfrak{Z}\mathfrak{e}$ per 2 fit $\frac{2}{2} \text{ } \mathfrak{Z} + \frac{2}{2} \text{ } \mathfrak{Z}\mathfrak{e}$, vnde sublato 1 $\mathfrak{Z}\mathfrak{e}$ fit 1 $\mathfrak{Z}$; item per 3, ex producto tollendo 2, fit pondus pentagonalium, &c.

Quinque corpora regularia, simpliciter vt per se spectantur^a, formantur per additamentum gnomonis, vt superficies fuerunt formatæ.

TETRAEDRONALES		OCTAEDRONALES		EICOSAEDRON	
F — R + A	O	F — R + A	O	F — R + A	O
1 — 0 + 0	1	4 — 4 + 1	1	15 — 20 + 6	1
3 — 0 + 0	4	12 — 8 + 1	6	45 — 40 + 6	12
6 — 0 + 0	10	24 — 12 + 1	19	90 — 60 + 6	48
10 — 0 + 0	20	40 — 16 + 1	44	150 — 80 + 6	124

10

CVBICI		DECAEDRONALES	
F — R + A	O	F — R + A	O
3 — 3 + 1	1	9 — 18 + 10	1
12 — 6 + 1	8	45 — 36 + 10	20
27 — 9 + 1	27	108 — 54 + 10	84
48 — 12 + 1	64	198 — 72 + 10	220

15

a. Ernest de Jonquières (*loc. cit.*, p. 15) propose : *ut per se simpliciter spectantur*. Prouhet (*loc. cit.*, p. 486) traduit : « Si l'on considère en eux-mêmes les corps simplement réguliers », avec cette note : « Ainsi nommés » pour les distinguer des corps semi-réguliers d'Archimède. »

Ita etiam polygonales regulariter fieri debent :

R — A	O	R — A	O	R — A	O	R — A	O
1 — 0	1	2 — 1	1	3 — 2	1	4 — 3	1
2 — 0	3	4 — 1	4	6 — 2	5	8 — 3	6
3 — 0	6	6 — 1	9	9 — 2	12	12 — 3	15
4 — 0	10	8 — 1	16	12 — 2	22	16 — 3	28

Quod si imaginaremur figuras istas vt mensurabiles, tunc vnitates omnes intelligerentur esse ejusdem rationis ac figuræ ipsæ : nempe in triangulis vnitates
 10 triangulares ; pentagona metiuntur per vnitatem pentagonam &c. Tunc eadem effet proportio plani ad radicem, quæ est quadrati ad suam radicem ; & solidi, quæ est cubi : vt si radix sit 3, planum erit 9, solidum 27, &c., v. g. Quod etiam valet in circulo & spherâ
 15 alijsque omnibus. Si enim vnus circuli circumferentia fit triplo major alterâ, ejusdem area continebit novies. Vnde animadvertis has progressionem nostræ mathe-
 feos, 2, 8, 27, &c., non esse alligatas figuris lineæ, quadrati, cubi, sed generaliter per illas diversas men-
 20 suræ species designari^a.

Corporis quod constat 4 hexagonis & 4 triangulis, latera sunt 18, anguli 12, facies 8. Igitur hujus gnomon constat 2 hexagonis & 3 triangulis faciebus, minus sex radicibus, + 2 angulis :

a. Le MS. donne ensuite un tableau évidemment transposé, et que nous avons dû remettre à sa place (p. 274 ci-après, l. 13-15), comme l'avaient fait déjà Prouhet et Ernest de Jonquières (*loc. cit.*).

Gnomon^a

F + F - R + A	O
3 + 2 - 6 + 2	1
9 + 12 - 12 + 2	12
18 + 30 - 18 + 2	44
30 + 56 - 24 + 2	108
45 + 90 - 30 + 2	215

5

Horum autem differentia ita definitur prioris :

$$\begin{array}{rcl}
 1 - 1 & 32 - 21 & 107 - 43 \\
 11 - 10 & 64 - 32 & 161 - 54 .
 \end{array}$$

Corporis quod constat 8 triangulis, 16 quadratis 10
faciebus, latera sunt 36, anguli 24 & facies 14. Hujus

a. Ernest de Jonquières ajoute, après $45 + 90 - 30 + 2 = 215$, une sixième ligne : $63 + 132 - 36 + 2 = 376$. (*Loc. cit.*, p. 17.)

b. On lit en outre, dans la copie de Leibniz : « Qui ad finistrum latus » lineæ characteres in Mto. elisi & dubii erant. »

Ces chiffres se trouvent, en effet, à gauche d'une ligne, en regard de laquelle est écrit : « Horum » autem... » — En outre, dans la copie de Leibniz, tout ce passage (l. 7-9) n'est pas à sa place : on le trouve après la l. 4, p. 274 ci-après ; nous l'avons rétabli où il devait être, comme avaient proposé déjà Prouhet et Ernest de Jonquières. Le premier dit en note : « On reconnaît là un calcul » de différences fait sur les nombres 1, 12, 44, 108, » 215, 376, du commencement de ce paragraphe. » (*Loc. cit.*, p. 487, note 1.) Ernest de Jonquières rapproche ces deux colonnes de chiffres de la dernière colonne du premier gnomon, et dispose l'ensemble, en le complétant, de la manière ci-contre.

Et il imprime en regard : « Horum autem numerorum differentia definita fuit priore loco ; item » differentiæ differentiarum usque < ad > tertiam » quæ est constans et æqualis numero 11. » (*Loc. cit.*, p. 17.)

	1	
	10	
	11	11
	21	
	32	11
	32	
	64	11
	43	
	107	11
	54	
	161	
	376	

gnomon constat 6 triangulis & 4 quadratis faciebus,
— 14 radicibus, + 5 angulis :

	F + F — R + A	O
5	6 + 4 — 14 + 5	1
Gnomon	18 + 16 — 28 + 5	12
	36 + 36 — 42 + 5	47
	60 + 64 — 56 + 5	120

Corporis quod constat 8 hexagonis & 6 quadratis
faciebus, latera sunt 36, anguli 24 & facies 14. Hujus
10 gnomon habet 6 hexagonas & 5 quadratas facies,
minus 23 radices, + 13 angulos :

	6 + 5 — 23 + 13	
Gnomon	36 + 20 — 46 + 13	24
	90 + 45 — 69 + 13	103
15	168 + 80 — 92 + 13	272

|Corporis quod constat 8 triangulis & 6 octangulis
faciebus, latera 36, anguli 24, facies 14. Hujus
gnomon habet 4 octogonas & 7 triangulares facies,
minus radices 20, plus angulos 10 :

20	7 + 4 — 20 + 10	1
	21 + 32 — 40 + 10	24
	42 + 84 — 60 + 10	100
	70 + 160 — 80 + 10	260

Corporis quod constat 18 quadratis & 8 triangulis, latera sunt 48, & anguli 24, & facies 26. Hujus autem gnomon constat 15 quadratis & 7 triangulis faciebus, — 37 radicibus, plus 16 angulis^a :

7 +	15 —	37 + 16	:	1
21 +	60 —	74 + 16	:	24
42 +	135 —	111 + 16	:	106
70 +	240 —	184 + 16	:	284

5

Corpus ex 20 triangulis & 12 pentagonis ; latera 60, anguli 30^b, & hujus gnomon habet 18 triangulas & 10 pentagonas facies, minus radices 48, plus 21 angulos^c :

18 +	10 —	48 + 21	:	1
54 +	50 —	96 + 21	:	30
108 +	120 —	144 + 21	:	135

15

.

 d

a. Ici se trouve placé, par erreur, dans la copie MS, le passage que nous avons dû rétablir ci-avant, p. 272, l. 7-9.

b. Lacune dans le MS., suppléée ainsi par E. Prouhet : (32 faces). (*Revue de l'Instr. publ.*, loc. cit., p. 487.)

c. E. Prouhet (*ibid.*) et E. de Jonquières (*loc. cit.*, p. 21) rétablissent ici le tableau que le MS. plaçait, à tort, plus haut, p. 271, l. 20, ci-avant.

d. Lacune suppléée ainsi par E. Prouhet : « Le corps qui est formé de » 12 pentagones et de 20 hexagones, a 90 arêtes, 60 sommets et 32 faces. » Son gnomon est formé de 11 pentagones et de 18 triangles, moins » 76 côtés, plus 48 angles. » (*Revue de l'Instr. publ.*, 1^{er} nov. 1860, p. 487.) E. de Jonquières : « Corporis quod constat ex 20 hexagonis

11 + 18 - 76 + 48	1
55 + 108 - 152 + 48	60
152 + 170 - 228 + 48	282

- Termini algebrici æquales istis numeris figuratis
 5 inveniuntur ducendo exponentem faciei + $\frac{1}{2}$ 2ℓ per
 $\frac{1}{3}$ 2ℓ + $\frac{1}{3}$, deinde per numerum facierum; hocque
 toties faciendo, quot sunt diversa genera facierum in
 dato corpore; deinde producto addendo vel tollendo
 numerum radicum ductum per $\frac{1}{2}$ 8 + $\frac{1}{2}$ 2ℓ, &c.,
 10 & numerum angulorum ductum per 1 2ℓ.

- Vt si quærantur termini adæquales numeris figu- 224
 ratis qui repræsentent corpus ex 20 triangulis &
 12 pentagonis, quoniam gnomon hujus corporis
 constat 18 triangularibus faciebus & 10 pentagonis,
 15 minus 48 radicibus, + 21 angulis, primò addo $\frac{1}{2}$ 2ℓ
 numero $\frac{1}{2}$ 8 + $\frac{1}{2}$ 2ℓ, qui est exponens faciei triangu-
 laris, & productum, nempe $\frac{1}{2}$ 8 + 1 2ℓ, duco per
 $\frac{1}{3}$ 2ℓ + $\frac{1}{3}$: fit $\frac{1}{6}$ 16 + $\frac{3}{6}$ 8 + $\frac{2}{6}$ 2ℓ, quod duco per 18,
 & fit 3 16 + 9 8 + 2 2ℓ.

- 20 Deinde addo etiam $\frac{1}{2}$ 2ℓ numero $\frac{3}{2}$ 8 - $\frac{1}{2}$ 2ℓ, qui
 est exponens faciei pentagonalis, & fit $\frac{2}{3}$ 8; quo ducto
 per $\frac{1}{3}$ 2ℓ + 1 8, fit $\frac{1}{2}$ 16 + $\frac{1}{2}$ 8; & deinde per 10, fit
 5 16 + 5 8; quod si jungatur cum numero præcedenti,

» & 12 pentagonis faciebus, latera sunt 90 & anguli 60. Et hujus gno-
 » mon habet 11 pentagonas & 18 hexagonas facies, minus 76 radices,
 » plus 48 angulos. » (*Loc. cit.*, p. 21.) Dans la copie MS., le dernier gno-
 mon : 11 + 18 - 76 + 48, etc., suivait immédiatement le texte : ...plus
 21 angulos (p. 274, l. 11-12), ce qui a motivé cette note de Leibniz :
 « Neque hic gnomon cum numeris convenit ut in prioribus. »

fit $8\mathcal{C} + 14\mathcal{Z} + 6\mathcal{Q}$. Vnde si tollatur numerus radic-
 cum 48, ductus per $\frac{1}{2}\mathcal{Z} + \frac{1}{2}\mathcal{Q}$, nempe $24\mathcal{Z} + 24\mathcal{Q}$,
 fit $8\mathcal{C} - 10\mathcal{Z} - 18\mathcal{Q}$; cui si addatur $21\mathcal{Q}$ propter
 21 angulos, fit $8\mathcal{C} - 10\mathcal{Z} + 3\mathcal{Q}$, numerus algebricus
 quæsitus. 5

Denique pondera omnium 14 solidorum, prout ima-
 ginamur illa oriri ex progressionibus arithmeticis :