

PROGETTI DI FORMAZIONE PER DOCENTI

m@t.abel



Matematica per gli studenti
alla soglia del terzo millennio



Unione Europea

FONDI
STRUTTURALI
EUROPEI

pon
2007-2013



MIUR

Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca
Dipartimento per la Programmazione
D.G. per gli Affari Internazionali - Ufficio IV
Programmazione e gestione dei fondi strutturali europei
e nazionali per lo sviluppo e la coesione sociale

COMPETENZE PER LO SVILUPPO (FSE) L1-FSE-2011-174 B10-FSE-2010-3

Con l'Europa, investiamo nel vostro futuro

m@t.abel

**Matematica per gli studenti
alla soglia del terzo millennio**

Il progetto editoriale e la redazione di questo volume sono stati realizzati da INDIRE - ANSAS con i fondi del Progetto *m@t.bel*, codice B10-FSE-2010-3, e del Progetto *Informazione, valorizzazione e disseminazione interventi e risultati realizzati con il PON FSE "Competenze per lo Sviluppo"*, codice L1-FSE-2011-174, cofinanziati dal Fondo Sociale Europeo.

Comitato redazionale

Ferdinando Arzarello
Claudio Bernardi
Rachele Borgi
Lucia Ciarrapico
Francesca De Santis
Massimiliano Naldini
Brunetto Piochi
Ornella Robutti
Rosetta Zan

Progetto editoriale e coordinamento esecutivo

Ilaria Bucciarelli

Progetto grafico

Miriam Guerrini

Coordinamento d'immagine

Gabriele Pieraccini

Elaborazione grafica della copertina

Lorenzo Guasti

INDIRE - ANSAS
via Michelangelo Buonarroti, 10 - Firenze
<http://www.indire.it>
<http://risorsedocentipon.indire.it>

© 2012 INDIRE - ANSAS

IL PIANO m@t.abel

Coordinatore scientifico

Ferdinando Arzarello

Coordinatrice del Comitato Tecnico Scientifico

Lucia Ciarrapico

Comitato Tecnico Scientifico

Giuseppe Anichini - Università di Firenze

Ferdinando Arzarello - Università di Torino

Claudio Bernardi - Università di Roma "La Sapienza"

Giorgio Bolondi - Università di Bologna

Lucia Ciarrapico - Ispettore Tecnico a r. MIUR

Pietro Di Martino - Università di Pisa

Franco Favilli - Università di Pisa

Giovanni Margiotta - MIUR DG per il personale scolastico

Margherita Motteran - Docente a r.

Massimiliano Naldini - ANSAS

Maria Gabriella Ottaviani - Università di Roma "La Sapienza"

Brunetto Piochi - Università di Firenze

Ornella Robutti - Università di Torino

Rosetta Zan - Università di Pisa

Autori delle attività del nucleo "Numeri"

Stefania Cotoneschi

Giuseppina Crivelli

Domenica Formica

Simonetta Ghelardini

Nicoletta Nollì

Patrizia Piccinini

Silvano Rossetto

Angela Sclavi

Sergio Zoccante

Coordinatori

Claudio Bernardi

Lucia Ciarrapico

Autori delle attività del nucleo "Geometria"

Rosa Laura Ancona

Roberto Battisti

Fabio Brunelli

Marina Dalè

Roberto Imperiale

Carmela Milone

Paolo Nardini

Riccardo Ruganti

Franco Spinelli

Luigi Tomasi

Coordinatori

Ferdinando Arzarello

Ornella Robutti

**Autori delle attività del
nucleo “Relazioni e funzioni”**

Pierangela Accomazzo

Marilina Ajello

Adria Archetti

Michela Barsanti

Lucia Anna D’Ambrosio

Lucia Stelli

Domingo Paola

Anna Perrotta

Fiorenza Turiano

Licia Ventavoli

Coordinatori

Gabriele Anzellotti

Giovanni Margiotta

Brunetto Piochi

**Autori delle attività del
nucleo “Dati e previsioni”**

Gaetana Bartolomei

Gianpaolo Baruzzo

Maria Grazia Cardillo

Barbara Dell’Aquila

Giuliana Della Torre

Maria Pia Perelli

Maria Carmela Rita Perrini

Guido Piovano

Daniela Proia

Paola Ranzani

Cinzia Villani

Coordinatori

Giuseppe Anichini

Maria Gabriella Ottaviani

INDICE

1. PREMESSA	7	6. LA REALIZZAZIONE DEL PROGETTO	39
1.1 Matematica e formazione	7	6.1 Articolazione	39
2. LE SCELTE DI m@t.abel NELLO SCENARIO INTERNAZIONALE	11	6.2 Realizzazione dei corsi del piano nazionale m@t.abel	40
2.1 Le comunità di pratica	11	6.3 Realizzazione dei corsi del piano PON m@t.abel	42
2.2 Le nuove tecnologie	13	7. IL MONITORAGGIO	45
2.3 Le competenze matematiche	16	7.1 I soggetti coinvolti	45
2.4 Studi comparativi: indicazioni	21	7.2 Il focus della rilevazione	45
3. L'EDUCAZIONE MATEMATICA	25	7.3 La procedura	46
3.1 Il laboratorio di matematica	25	7.4 Gli strumenti	46
3.2 Gli alunni in difficoltà	27	8. CONCLUSIONI	49
4. I CORSI DI FORMAZIONE m@t.abel	29	9. RIFERIMENTI	51
5. LE RISORSE	31	LE ATTIVITÀ DEI PIANI m@t.abel	53
5.1 Le risorse culturali	31	1. Numeri	55
5.2 Le risorse istituzionali	34	2. Geometria	67
5.3 Le risorse tecnologiche	35	3. Relazioni e funzioni	78
		4. Dati e previsioni	89
		5. Percorsi nelle attività	103



1 PREMESSA

A partire dal 2006 il Ministero dell'Istruzione, dell'Università e della Ricerca, l'Istituto Nazionale di Documentazione per l'Innovazione e la Ricerca Educativa - Agenzia Nazionale per lo Sviluppo e l'Autonomia Scolastica (INDIRE - ANSAS) e le Associazioni Nazionali per la matematica e la statistica (Unione Matematica Italiana - UMI e Società Italiana di Statistica - SIS) hanno unitamente promosso il piano nazionale m@t.abel per il rinnovamento e il miglioramento dell'insegnamento/apprendimento della matematica, rivolto ai docenti di matematica di scuola secondaria di primo grado e del primo biennio di scuola secondaria di secondo grado nella prospettiva di estenderlo a tutta la fascia scolastica.

Successivamente essa vedrà l'estensione da una parte ai docenti della scuola primaria e dall'altra a quelli delle successive classi del ciclo secondario.

Da questa esperienza, come risposta alle carenze rilevate dall'indagine internazionale OCSE-PISA sulle competenze matematiche degli allievi, prende avvio nel 2008 il corso PON m@t.abel promosso dal MIUR con fondi PON FSE "Competenze per lo Sviluppo" e approvato dalla Commissione Europea nel 2007. Il piano PON m@t.abel, che va ad affiancarsi al piano nazionale m@t.abel, coinvolge esclusivamente quattro regioni, denominate "regioni convergenza": Calabria, Campania, Puglia e Sicilia.

1.1 MATEMATICA E FORMAZIONE

È riconosciuto a livello internazionale il contributo fondamentale che l'educazione matematica offre nella formazione dei giovani, cittadini del domani. Infatti, l'educazione matematica contribuisce, insieme con tutte le altre discipline, alla formazione culturale del cittadino in modo da consentirgli di partecipare alla vita sociale con consapevolezza e capacità critica. Le competenze del cittadino al cui raggiungimento concorre l'educazione matematica, sono per esempio: esprimere adeguatamente informazioni, intuire e immaginare, risolvere e porsi problemi, progettare e costruire modelli di situazioni reali, operare scelte in condizioni d'incertezza. La conoscenza dei linguaggi scientifici, e tra essi in primo luogo di quello matematico, si rivela sempre più essenziale per l'acquisizione di una corretta capacità di giudizio. In particolare, l'insegnamento della matematica avvia gradualmente, a partire da campi di esperienza ricchi per l'allievo, all'uso del lin-

guaggio e del ragionamento matematico, come strumenti per l'interpretazione del reale, e non può costituire unicamente un bagaglio astratto di nozioni.

In tal senso la matematica compare in tutti i Paesi del mondo quale elemento essenziale nella formazione degli allievi, a ogni livello d'età e qualunque sia il percorso scelto. Significativa a questo proposito è la risoluzione approvata all'unanimità nel 1997, in cui la Conferenza generale dell'UNESCO così si esprime:

“considerata l'importanza centrale della matematica e delle sue applicazioni nel mondo odierno nei riguardi della scienza, della tecnologia, delle comunicazioni, dell'economia e di numerosi altri campi; consapevole che la matematica ha profonde radici in molte culture e che i più importanti pensatori per migliaia di anni hanno portato contributi significativi al suo sviluppo, e che il linguaggio e i valori della matematica sono universali e in quanto tali ideali per incoraggiare e realizzare la cooperazione internazionale; si sottolinea il ruolo chiave dell'educazione matematica, in particolare al livello della scuola primaria e secondaria sia per la comprensione dei concetti matematici sia per lo sviluppo del pensiero razionale”.

La matematica, tuttavia, è spesso poco amata dagli studenti, anche per l'immagine non positiva che ne danno i mass media. Ciò avviene proprio mentre la richiesta di formazione matematica è sempre più diffusa ed avvertita in tutti i Paesi (basti pensare alle direttive Lisbona 2007/2013).

Jean-Pierre Bourguignon, Presidente della Società Matematica Europea, scriveva pochi anni or sono:

“Molti [...] ‘oggetti’ della matematica sono collegati sia con le componenti più dinamiche dell'economia, in quanto questa nuova presenza è strettamente connessa alle possibilità offerte dai computer, sia con molti altri aspetti dell'organizzazione nella società moderna. Quotidianamente noi usiamo molti oggetti il cui funzionamento è basato su risultati matematici e spesso su quelli più recenti. Nell'attuale società la matematica è sempre presente, ora più che mai, ma di questo non sempre siamo consapevoli, neppure noi matematici”.

La frase lancia una sfida ai Paesi maggiormente sviluppati e che mirano a un forte avanzamento tecnologico: è soprattutto la scuola che deve farsene concretamente carico. In questa sfida l'Italia non può restare indie-

tro. Abbiamo, perciò, bisogno di docenti ben preparati in matematica che avvicinino gli allievi a questa disciplina con curiosità e fantasia.

Il primo passo da compiere, perciò, è migliorare gli standard di professionalità dei docenti. Nell'introduzione al testo "Standard professionali per gli insegnanti", redatto a cura dell'associazione americana "National Council of Teachers in Mathematics", si legge che:

"gli insegnanti sono figure chiave per cambiare i modi in cui la matematica è insegnata e appresa a scuola; tali cambiamenti richiedono che gli insegnanti ricevano sostegno a lungo termine e risorse adeguate".

Il progetto m@t.abel si propone una rinnovata formazione dei docenti di matematica che operano nell'intero territorio italiano, puntando su nuove metodologie nell'insegnamento/apprendimento della matematica.



2 LE SCELTE DI m@t.abel NELLO SCENARIO INTERNAZIONALE

Il progetto m@t.abel, sia per la metodologia sia per i contenuti, si inserisce adeguatamente nelle tematiche più aggiornate che il quadro internazionale dell'attuale ricerca didattica sottolinea.

A titolo puramente esemplificativo, tra le sei conferenze plenarie previste nel 2012 al 12° ICME (International Congress on Mathematical Education), il più importante congresso internazionale sull'educazione matematica, che si tiene ogni tre anni, troviamo due titoli che sono consonanti con tematiche fortemente presenti nel progetto: "Classroom Practice and Culture & Research" e "Mathematical Modelling & its Education". Inoltre tra gli innumerevoli Topic Group dello stesso congresso troviamo, oltre a quelli più consueti (sull'insegnamento dei diversi argomenti matematici, sul problema della multiculturalità, ecc.) i seguenti temi, anch'essi molto presenti in m@t.abel: "Mathematical applications and modeling in the teaching and learning of mathematics", "Analysis of uses of technology in the teaching of mathematics", "Research on classroom practice", "Learning and cognition in mathematics".

È impossibile discutere qui tutti questi argomenti, vista la loro complessità ed ampiezza. Ci limitiamo a soffermarci su alcuni temi particolarmente rilevanti per il progetto.

2.1 LE COMUNITÀ DI PRATICA

M@t.abel realizza concretamente sul territorio il costituirsi e possibilmente il consolidarsi di svariate comunità di pratica. Questa nozione fu introdotta dagli antropologi cognitivi Jean Lave ed Etienne Wenger negli anni Novanta ed è successivamente stata adattata all'insegnamento della matematica, in particolare da Barbara Jaworski, esperta in didattica della matematica, nel decennio successivo.

Il metodo propone una teoria sociale dell'apprendimento che si fonda su quattro premesse:

- siamo esseri sociali;
- la conoscenza è una questione di competenza per tutta una serie di attività socialmente apprezzate (cantare intonati, scoprire leggi scientifiche, riparare macchine, scrivere poesie e quant'altro);

- conoscere vuol dire partecipare al perseguimento di queste attività socialmente apprezzate, ossia assumere un ruolo attivo nel mondo;
- il significato (il nostro fare esperienza del mondo e la nostra relazione attiva con esso come qualcosa di significativo) è ciò che alla fine l'apprendimento è chiamato a generare.

Sulla base di questi assunti, la teoria si concentra principalmente sull'apprendimento come *partecipazione sociale*, ovvero come un processo nel quale si è partecipanti attivi nelle *pratiche* di comunità sociali e nel quale bisogna costruirsi una propria *identità* in relazione a queste comunità.

La partecipazione sociale influenza non solo ciò che facciamo, ma anche chi siamo e come interpretiamo ciò che facciamo. Una teoria sociale dell'apprendimento deve integrare perciò le componenti necessarie a caratterizzare la partecipazione sociale come un processo legato all'apprendere e al conoscere.

Le componenti in questione, profondamente interconnesse tra di loro, sono:

- *Significato*: si riferisce alla capacità delle persone di sperimentare la vita e il mondo come qualcosa di significativo, sia a livello individuale che collettivo.
- *Pratica*: evoca le risorse storiche e sociali, le strutture di riferimento e le prospettive comuni che sostengono il reciproco coinvolgimento nell'azione.
- *Comunità*: rimanda agli aspetti sociali in cui le nostre attività sono considerate meritevoli di essere perseguite e dove la partecipazione è identificabile come competenza.
- *Identità*: dice come l'apprendimento modifica chi siamo e crea delle storie personali in divenire nell'ambito delle nostre comunità.

Il metodo di m@t.abel, le strutture infrastrutturali su cui si appoggia (la piattaforma PuntoEdu, il materiale di supporto, la classe virtuale), l'intreccio che propone tra l'attività di formazione e quella di sperimentazione in classe, che si svolgono contemporaneamente e le cui problematiche sono discusse nella piattaforma in tempo reale, come sarà spiegato dopo con maggiori dettagli, rappresentano una realizzazione concreta di una comunità di pratica.

2.2 LE NUOVE TECNOLOGIE

Il progetto è profondamente caratterizzato dall'uso delle tecnologie, sia a livello di azione didattica proposta nelle classi, sia a livello di classe virtuale degli insegnanti. È importante precisare con quale metodologia e con quali obiettivi si utilizzino e soprattutto come non debbano essere utilizzate le tecnologie in m@t.abel: per questo è opportuna una breve discussione sull'evoluzione di queste infrastrutture nelle pratiche didattiche.

Le tecnologie hanno cominciato ad avere una diffusione consistente nelle attività formative verso la fine degli anni Novanta sotto diverse denominazioni, ma con il rapido imporsi di metodologie di formazione di tipo e-learning.

L'approccio iniziale fu sostanzialmente caratterizzato dall'accesso a contenuti multimediali e ipertestuali via web, quindi piuttosto semplicistico nei riguardi dei problemi dell'apprendimento. Sono state avviate allora riflessioni, ricerche e concettualizzazioni che hanno portato a nuove pratiche di usi didattici delle tecnologie, tutte caratterizzate dalla focalizzazione sull'apprendimento più che sulla tecnologia, e sull'utilizzo delle tecnologie per quelle loro peculiari caratteristiche in grado di migliorare l'apprendimento.

Gianni Marconato, psicologo esperto in processi formativi, riassume molte ricerche articolando in quattro tempi questo progressivo spostamento:

- Il passato: *e-learning* o *delivery mode* (costruzione, organizzazione e distribuzione di informazioni/contenuti).
- Il presente: *collaborative & networked learning* (comunicazione, collaborazione e costruzione di artefatti).
- Il futuro prossimo: *connected learning* (reti sociali, condivisione di risorse, costruzione di conoscenza).
- Il futuro remoto: *immersive learning* (visualizzazione, manipolazione, interazione e costruzione).

Si passa da una pubblicazione statica di documenti su web ad una progressiva gestione dinamica di documenti, per arrivare a una spiccata interazione tra persone e tecnologie di varia natura. Ad ognuno di questi

quattro tempi corrispondono dei modelli molto diversi tra di loro, sia per quanto riguarda l'uso che in essi viene fatto delle tecnologie, sia per i presupposti didattici sulla base dei quali sono implementati. Malgrado la sostanziale diversità, questi quattro modelli rappresentano alcuni spostamenti concettuali e operativi che caratterizzano i rispettivi ambienti di apprendimento. M@t.abel si situa al terzo livello e tende idealmente al quarto.

Alcuni degli spostamenti concettuali indotti di conseguenza sono:

- *Da formale a informale*: da modelli di apprendimento basati sul setting della scuola con ruoli ben definiti, con programmi didattici e sistemi di valutazione ben formalizzati, i nuovi ambienti di apprendimento si evolvono verso modelli di apprendimento informale basati sull'esperienza, sulla riflessione, sulla conversazione, sulla soluzione di problemi, sullo svolgimento di attività.
- *Da strutturato a destrutturato*: gli ambienti di apprendimento strutturati, formalizzati, sequenziali, rigidamente pianificati diventano destrutturati, aperti, con obiettivi verso cui dirigersi ma con il percorso non prefissato, in continuo adattamento al contesto.
- *Da statico a dinamico*: mentre i valori cardine degli ambienti tradizionali sono la rigida strutturazione e la progettazione pianificata, gli ambienti emergenti sono dinamici, con una progettazione iniziale rappresentante le intenzioni, ma sempre pronti ad adattarsi alle condizioni reali in cui si sta svolgendo il processo.
- *Da certo a incerto*: prende il sopravvento l'incertezza sia dell'esito, consapevoli del fatto che non è possibile prevedere esattamente il risultato finale di un processo complesso come l'apprendimento, sia dello svolgimento del processo stesso.
- *Da generico a situato*: gli obiettivi di conoscenza e la conoscenza stessa abbandonano la genericità e l'astrattezza, per essere sempre più focalizzati sul contesto, sulla specifica situazione di utilizzo, concordando con il principio secondo cui più la formazione è generica, meno è efficace.
- *Dalla conformità alla divergenza*: prima ciò che veniva chiesto allo studente era di conformarsi a regole dettate dalla disciplina, ora invece viene valorizzato il pensiero divergente, la creatività, il perseguimento di obiettivi personali degli alunni.
- *Dalla dipendenza alla responsabilità*: l'atteggiamento di sostanziale dipendenza da scelte

esterne che viene richiesto di assumere alla persona che apprende in ambienti tradizionali diventa un atteggiamento di responsabilità del risultato personale anche con il rischio di non raggiungere il prodotto sperato.

Invece gli spostamenti rilevati sul piano della pratica sono:

- *Dai contenuti all'interazione didattica, alla costruzione*: i modelli primitivi di uso didattico delle tecnologie replicavano semplicemente il modello tradizionale di scuola, quello basato sui contenuti e sulla loro trasmissione. Si cerca ora di trovare usi più ricchi delle tecnologie consentendo una interazione tra i soggetti coinvolti, una comunicazione che permetta di condividere conoscenze ed esperienze per argomentare, per affrontare e risolvere problemi, per costruire artefatti.
- *Dalla centralità del docente alla centralità del soggetto che apprende*: negli ambienti di apprendimento tradizionale il docente, essendo il depositario dei contenuti, rappresentava la centralità, nel senso che le conoscenze erano quelle comunicate da lui stesso e la sua interpretazione dei fatti era quella cui gli studenti si dovevano conformare. Ora il controllo del processo di apprendimento è nelle mani del soggetto che apprende.
- *Il ruolo del docente da esperto dei contenuti a facilitatore dell'interazione tra chi apprende*: avendo assunto centralità il soggetto che apprende e il suo processo di apprendimento, il ruolo di docente diventa quello di supporto all'apprendimento, fino a scomparire del tutto (*learning without teaching*).
- *Dalla classe alla comunità di apprendimento e di pratica*: la classe non è più l'unico luogo in cui si impara, infatti sempre più spesso si apprende attingendo alle risorse presenti nella comunità di riferimento.
- *Dalle tecnologie visibili alle tecnologie invisibili*: l'approccio iniziale alla tecnologia aveva dato alla tecnologia stessa una forte visibilità. Con lo spostamento sull'utilizzo della tecnologia per migliorare i processi di apprendimento, le caratteristiche di questi ultimi hanno conquistato centralità e visibilità, portando la tecnologia in secondo piano, cioè rendendola trasparente e facendole assumere valore non tanto per se stessa (rischio che si correva precedentemente) ma per i precisi fini educativi e didattici per i quali è utilizzata.

Per poter riassumere tutti questi spostamenti, potremmo dire che è come se ci fosse stato un passaggio dal *learning* con prefisso (la *e* di *electronic*) al *learning* senza prefisso, ovvero una perdita di centralità della tecnologia e una riappropriazione di centralità dei processi di apprendimento. Infatti, il futuro delle tecnologie per la didattica sta nella ricentatura dell'attenzione sul *learning*, oggetto di studio della ricerca psicologica, cognitiva e didattica contemporanea. Le tecnologie così come sono usate in m@t.abel possono dare un valore aggiunto ai processi di apprendimento, fondato sulla metodologia, cioè sull'uso come strumenti di supporto per strategie didattiche ben definite, focalizzate sul processo di apprendimento di studenti o di docenti impegnati in formazione professionale.

2.3 LE COMPETENZE MATEMATICHE

Nell'insegnamento della matematica sono prioritarie alcune grandi competenze disciplinari, quali:

1. avere il senso del numero;
2. avere il senso del grafico;
3. avere il senso del simbolo;
4. analizzare dati, rielaborarli;
5. costruire modelli a partire da dati e utilizzare modelli per esplorare fenomeni e situazioni;
6. fare previsioni in condizioni di incertezza;
7. risolvere problemi aperti o chiusi;
8. utilizzare il linguaggio e il ragionamento scientifico, fare dimostrazioni.

Su queste competenze, la ricerca didattica internazionale e nazionale ci dà indicazioni e direttive importanti, attraverso studi teorici e risultati di esperimenti didattici.

Per “senso del numero” si intende non solo la conoscenza dei numeri interi, decimali, frazionari, irrazionali, e la capacità di operare con essi (con calcoli mentali, scritti, o con l'aiuto delle tecnologie), avendo la consapevolezza delle operazioni e delle loro proprietà. Ma è di fondamentale importanza per il cittadino posse-

dere la capacità di stima di un ordine di grandezza, di un errore, di cifre decimali significative, e la capacità di determinare una percentuale o di fare calcoli approssimati.

Sowder fa i seguenti esempi per rendere l'idea:

“Ho sufficiente denaro per pagare questi libri? Di quanto colore ho bisogno per tinteaggiare la stanza? Quante persone sono nello stadio? Quanto tempo impiego per arrivare dal dentista? Rispondere a queste domande coinvolge stimare risultati di calcoli, stimare misure, e stimare la numerosità. Ciascuna di esse richiede diversi tipi di comprensione e differenti insiemi di abilità”.¹

Possedere il senso del numero significa giudicare se il risultato di un esercizio in cui sono coinvolti calcoli su dati iniziali è accettabile o no, senza rifare i calcoli, ma basandosi su una stima dell'ordine di grandezza.

A questo proposito scrive Villani:

“prendo lo spunto da un semplicissimo problema di scuola elementare:

Problema 1. Un'automobile consuma 1 litro di benzina ogni 14 km.

Quanta benzina è necessaria per percorrere 315 km?

Chi ha posto il problema si attende, ovviamente, una risposta del tipo: $315 : 14 = 22,5$ litri.

Ma può capitare che qualche ragazzo ottenga un risultato sbagliato. Per esempio:

2,25 litri (virgola posizionata troppo a sinistra);

225 litri (virgola dimenticata);

21 litri (errore di distrazione: divisione di 315 per 15 anziché per 14);

0,044 litri (inversione di ruoli tra dividendo e divisore: 14 diviso per 315, anziché 315 diviso per 14);

4410 litri (ricorso ad un'operazione sbagliata: moltiplicazione, anziché divisione, di 315 per 14).

Che un ragazzo possa commettere uno di questi errori, o magari un errore ancora diverso, non è poi tanto strano. Quello che a prima vista appare ben più strano è che spesso, in ambito scolastico, chi

¹ Sowder, J.T. (1992), “Making sense of in school mathematics”, *Analysis of Arithmetic for mathematics teaching*, Ed. Leinhardt, G., Putnam, R., Hatrup, R.A., Hillsdale, pp. 1-51.

commette l'errore non se ne rende subito conto, nonostante la palese assurdità del risultato trovato (tra gli errori esemplificati, l'unico che dà luogo ad un risultato con ordine di grandezza ragionevole, è il terzo). Mi chiedo: questa stessa insensibilità all'ordine di grandezza si manifesterebbe anche in situazioni di vita reale, al momento di rifornimento di benzina ad una stazione di servizio? Credo proprio di no! Già un bambino in prima elementare sa che con un paio di litri di benzina non si va molto lontano e sa anche che viceversa alcune centinaia o addirittura alcune migliaia di litri di benzina sono una quantità del tutto spropositata per un viaggio di poco più di 300 km".

E ancora:

"per insegnare ad usare la matematica è di fondamentale importanza sfruttare ogni possibile occasione per ricontestualizzarla, ossia per stabilire collegamenti significativi tra la matematica stessa e il mondo reale".²

Sono importanti quindi tutte quelle attività in cui gli studenti, lavorando in contesti di apprendimento, hanno la possibilità di farsi un'idea degli ordini di grandezza dei numeri che utilizzano, come misure di grandezze coinvolte, ma anche come numeri in sé.

Per "senso del grafico" si intende non solo l'abilità di rappresentare dati (punti, o funzioni di data equazione) su un grafico, o di leggere grafici, ma più in generale di decodificare la varietà di informazioni contenute in un grafico, sia a livello globale che a livello locale, di produrre grafici per rappresentare funzioni, andamenti, fenomeni, di distinguere tra rappresentazione discreta e continua, di avere sempre presente i fattori di scala.³

Per quanto riguarda il "senso del simbolo", Arcavi ha apportato un enorme contributo alla ricerca da questo punto di vista, mettendo in evidenza come, troppo spesso, gli studenti si dimostrino abili a padroneggiare le tecniche algebriche e a manipolare i simboli, ma si rivelino incapaci di riguardare l'algebra come strumento

² Villani, V. (1995), *Dare un senso ai numeri. Induzioni*, (10), pp. 19-29.

³ Robutti, O. (2001), "È possibile avviare gli studenti al senso del grafico con calcolatrice e sensore?", *Ipotesi*, 4(3), pp. 10-14.

di pensiero per scoprire e stabilire connessioni, per formulare e validare congetture, per esprimere generalità. Per Arcavi gli studenti possiedono il senso del simbolo se sono capaci di: ricorrere ai simboli come strumenti per comprendere il significato del problema e per risolverlo, abbandonarli nel momento in cui rischiano di rimanere ancorati alle manipolazioni, cogliere i vari ruoli che essi possono giocare in contesti differenti, leggere attraverso di essi le relazioni esistenti tra le variabili in gioco, scegliendo anche opportunamente il modo nel quale rappresentare queste ultime.⁴

Uno studio fatto qualche anno fa dalla NAEP, l'ente che negli Stati Uniti valuta le acquisizioni degli studenti, ha rilevato che gli studenti della scuola secondaria generalmente sembrano avere una certa conoscenza dei concetti e delle abilità basilari in algebra e geometria. Però, spesso non sono capaci di applicare tali conoscenze in situazioni di problem solving, né sembrano comprendere molte delle strutture che stanno sotto tali concetti e abilità.

Gli allievi colmano tale loro incapacità a comprendere, memorizzando regole e procedure e finiscono così inevitabilmente col credere che queste rappresentino l'essenza della matematica: più della metà di loro giudica che l'apprendimento della matematica consista sostanzialmente nel mandarle a memoria. Si creano così generazioni di analfabeti da un punto di vista matematico, che G. Lolli chiama efficacemente "anumerati".

Il punto drammatico è che non solo gli allievi spesso non conoscono il significato delle formule e dei concetti in matematica, ma ne inventano uno fasullo, che surroga quello autentico. Il problema didattico di fondo è che risulta estremamente difficile mettere in crisi tali loro misconcetti, in quanto il significato inventato ha una sua logica, eventualmente radicata in modelli precedentemente appresi. Quindi occorre sviluppare una opportuna didattica in cui gli allievi imparano a diventare padroni del senso vero dei simboli che usano, favorendo la formazione di modelli mentali ricchi in campi di esperienza vari e opportuni. E altresì occorre evitare l'addestramento per pura memorizzazione di regole e meccanismi formali, il quale favorisce invece l'idea che il senso di una formula e delle trasformazioni su di essa consista soltanto nella sua struttura segnica e produce in tal modo l'idea della matematica come puro gioco linguistico, cui accennavamo nel capitolo 1.

⁴ Arcavi, A. (1994), "Symbol sense: informal sense-making in formal mathematics", *For the Learning of Mathematics*, 14(3), pp. 24-35.

Per entrare nel problema in profondità è opportuno chiarire in forma precisa che cosa si intenda con parole come: il *sensu* o il *significato* delle espressioni simboliche della matematica, il rapporto di queste nozioni rispetto ai *segni* con cui tali espressioni sono scritte, le dinamiche di pensiero da esse prodotte negli allievi. Il problema va studiato da un punto di vista epistemologico, cognitivo e didattico. Epistemologicamente, bisogna distinguere tra *processi* computazionali e *oggetti* astratti: ad esempio, il numero $(2+3)$ può essere concepito in due modi: operativamente, cioè come processo, e strutturalmente, cioè come oggetto. L'apprendimento avviene cognitivamente in dialettica tra concezioni operative e strutturali della stessa nozione.

Le successive tre competenze (la 4, la 5 e la 6, ovvero rispettivamente “analizzare dati, rielaborarli”; “costruire modelli a partire da dati e utilizzare modelli per esplorare fenomeni e situazioni”; “fare previsioni in condizioni di incertezza”) sono particolarmente importanti per il cittadino e costituiscono la peculiarità della matematica nei rapporti con le altre discipline e con la realtà quotidiana, in quanto promuovono la capacità di interpretare fatti e fenomeni attraverso la rielaborazione di dati e la costruzione di modelli.

In questo caso si vede come la matematica si caratterizzi per la tipologia degli strumenti di modellizzazione che mette a punto. La modellizzazione ha un risvolto altrettanto importante, che è la possibilità di fare previsioni, interrogando il modello costruito. E questa competenza si intreccia profondamente con quella di operare in condizioni di incertezza, ossia utilizzare il calcolo delle probabilità.

Purtroppo succede che nella didattica tradizionale spesso i concetti matematici siano presentati *“come cose da studiare piuttosto che come modelli. A volte, nel motivare l'introduzione di un nuovo argomento matematico, si premette l'illustrazione, esplicitamente semplificata, di un problema 'reale', ma in genere è trascurata la fase iniziale della modellizzazione”*.⁵

È indispensabile invece potenziare nella scuola superiore le competenze rivolte alla modellizzazione, sempre per contribuire a formare un cittadino matematicamente accorto e consapevole.

La penultima competenza, “risolvere problemi aperti o chiusi”, riguarda la risoluzione di problemi posti da altri o da se stessi. In particolare, i problemi che uno studente affronta nella scuola superiore dovrebbero avere

⁵ Dapueto, C. (1998), “Conflitti di significato nell'incontro della matematica con le altre discipline”, in Gallo, E., Giacardi, L., Roero, C.S. (a cura di), *Conferenze e Seminari 1997-1998*, Associazione Subalpina Mathesis, Torino, pp. 77-90.

enunciati sia chiusi (a richiesta determinata), sia aperti (dove le richieste sono lasciate in forma più libera, ossia si chiede allo studente di esplorare una situazione e vedere quali conseguenze determina al variare delle premesse poste).

L'ultima competenza, "utilizzare il linguaggio e il ragionamento scientifico, fare dimostrazioni", contribuisce al raggiungimento di quella trasversale ("utilizzare consapevolmente i processi logici"), riferendosi all'utilizzo di definizioni, alla formulazione di congetture, all'applicazione di proprietà, alla deduzione di enunciati a partire da ipotesi poste, quindi al fare dimostrazioni.

Vorremmo sottolineare due punti che riguardano la scelta effettuata: in primo luogo, queste competenze dovrebbero costituire il bagaglio di uno studente alla fine della scuola superiore; in secondo luogo, esse possono essere costruite solo con una didattica dai tempi lunghi, ossia fondandole già dai primi anni della scuola primaria.

Queste competenze possono essere raggiunte dagli studenti soltanto se la scuola consente loro di fare esperienze in contesti di apprendimento ricchi per la possibilità di essere esplorati, densi di significato per i concetti che coinvolgono, profondi per la possibilità di operare all'interno di una (o parte di una) teoria.

2.4 STUDI COMPARATIVI: INDICAZIONI

Negli ultimi anni sono stati realizzati studi comparativi di grande scala, come lo IEA/TIMSS e lo OCSE-PISA e per l'Italia i progetti INVALSI, che valutano in vario modo l'apprendimento della matematica nelle nostre scuole, a diverse età.

Come è noto, PISA valuta fino a che punto i quindicenni hanno acquisito alcune delle conoscenze e delle abilità essenziali per una completa partecipazione alla società. Sono coperti i domini della lettura e dell'alfabetizzazione matematica e scientifica. Per la matematica l'OCSE (OECD) ha scelto di privilegiare le competenze legate alla soluzione di problemi tratti dalla vita reale e quindi i quesiti sono generalmente contestualizzati e richiedono una gamma di prestazioni che vanno da semplicissime abilità di calcolo a riflessioni critiche sulla modalità di soluzione del problema proposto. Questi studi, se pur limitati ad alcuni

settori particolari, possono essere usati per identificare punti di forza e di debolezza nei diversi Paesi. Il quadro teorico del progetto PISA e le modalità di costruzione delle prove sono riferimenti importanti sul tema della valutazione.

Ad esempio, il documento prodotto dalla Comunità Europea nel 2004 dal titolo “Europe needs more scientists”⁶ esamina la possibilità di avere, nell’immediato futuro, curricoli, insegnamento e valutazione “PISA-driven”, cioè focalizzati esclusivamente sui problemi di matematizzazione tratti dalla vita reale. Nello stesso documento è espressa la preoccupazione che, in questa linea, ci si concentri solo su ciò che è “concreto, vicino e familiare”, perdendo di vista gli aspetti di natura teorica o filosofica delle discipline, che pure sono ritenuti molto interessanti dagli studenti. In effetti, dal quadro di riferimento PISA, la matematica come costruzione teorica è poco presente (in parte anche perché l’indagine riguarda allievi di 15 anni). In realtà la matematizzazione non segue soltanto la dinamica “diretta”, pur molto importante, descritta in PISA: dal problema nel mondo reale alla traduzione nel linguaggio della matematica e dalla soluzione matematica alla soluzione nel mondo reale. Vi è anche una dinamica “inversa” centrata sulla matematica come sapere teorico. Il modo con cui descrivo/interpreto il mondo reale è (può essere) profondamente influenzato dalla teoria matematica e dalle sue rappresentazioni simboliche.

Questa seconda componente è presente tradizionalmente nel curriculum di matematica delle nostre scuole e la tradizione si è conservata anche nei curricoli che si sono via via succeduti nelle modifiche ordinamentali e nei progetti sperimentali.

Le due componenti sono presenti entrambe in modo bilanciato nelle proposte curriculari dei testi “Matematica 2001” e “Matematica 2003” e nell’ampia collezione di esempi didattici che li corredano. Corrispondentemente, esse trovano un’altrettanta equilibrata integrazione nelle proposte del progetto m@t.abel che da tali esempi derivano.

In tutte le proposte, infatti, si delinea, sia pure con accenti e intensità diversi, una concezione delle competenze matematiche come un complesso di processi basati sia sulla matematizzazione come processo di modellizzazione della realtà all’interno di una teoria sempre più sistematica, sia sullo scambio con gli altri, sia sull’interfaccia tra l’esperienza individuale e quella collettiva.

⁶ <http://europa.eu.int/comm/research/press/2004/pr0204en.cfm>.

I risultati della ricerca OCSE-PISA del passato decennio mostrano che i quindicenni italiani sono deboli proprio in questo tipo di competenze, tipicamente nelle risposte aperte in cui si chiedeva di verbalizzare e spiegare le procedure seguite nella soluzione del problema o i passi di un ragionamento (con una percentuale di omissioni molto alta).

Tra le principali carenze evidenziate dalle prove PISA e confermate dalle prove INVALSI (perlomeno quando è possibile stabilire un confronto tra le due, vista la diversa natura e le diverse età in cui sono somministrate queste seconde prove) sembrano essere particolarmente rilevanti per il loro aspetto trasversale le seguenti:

- I nostri allievi non mostrano il possesso di competenze come ‘processi’ strutturati in forme complesse (riproduzione, connessione, riflessione). Cioè, i nostri allievi non applicano le abilità apprese a scuola a un contesto meno strutturato in cui le istruzioni sono meno chiare e in cui devono decidere quali siano le conoscenze pertinenti e come si possano utilmente applicare. L’educazione scolastica non sembra fornire loro concetti operativi (alcuni risultati delle prove INVALSI confermano questo dato negativo anche in problemi più scolastici e curricolari).
- Nelle prestazioni linguistiche dei nostri allievi mentre fanno matematica risulta spesso scisso il rapporto tra aspetti verbali e aspetti simbolici. PISA richiede competenze alte sia nella lettura (sotto questo aspetto anche le prove INVALSI) sia nella produzione di testi matematici. L’apprendimento della matematica è inteso infatti come una pratica sociale e non solo come elaborazione silente di calcoli scritti.

Tutti gli esempi proposti nel progetto m@t.abel concentrano l’attenzione proprio su questi aspetti. Quindi i docenti che lavoreranno interattivamente con questo materiale nella piattaforma PuntoEdu e che potranno sperimentare con i loro allievi alcune di tali proposte saranno portati a riflettere professionalmente proprio su come questi aspetti si intreccino di continuo con le quotidiane attività di classe svolte in ottemperanza alle indicazioni dei curricula ufficiali.

In una prima fase le prove INVALSI, che sono state somministrate in tutte le scuole del primo ciclo, presentavano una struttura a risposta chiusa per tutti gli item, permettendo quindi di indagare le conoscenze degli allievi nei vari nuclei di contenuto del curriculum.

Invece fin dall'inizio il test dell'indagine OCSE-PISA, che non fa riferimento ai curricoli, ha previsto anche item a risposta aperta che richiedono spesso una risposta argomentata. In tal modo esso concentra la propria attenzione oltre che su conoscenze e abilità che fanno riferimento a Nuclei di contenuto – per usare la terminologia del curriculum UMI – anche a competenze relative a Nuclei di processi (quali *Pensare e ragionare, Argomentare, Comunicare, Modellizzare, Porre e risolvere problemi, Rappresentare, Usare linguaggi e operazioni simbolici, formali e tecnici, Usare aiuti e strumenti*).

D'altro canto, i risultati poco brillanti in matematica degli studenti italiani, che emergono dalle rilevazioni OCSE-PISA, sottolineano ulteriormente quanto è già evidenziato dai dati delle prove INVALSI: l'andamento negativo dei risultati dopo la scuola primaria segnala che è proprio nel primo ciclo, e in particolare nella scuola secondaria di primo grado, che si fondano le difficoltà di reale apprendimento della matematica, le quali poi si manifestano così negativamente negli ordini scolastici successivi. Come detto sopra, queste difficoltà sembrano esplicitarsi in particolare quando i nostri allievi debbono affrontare situazioni problematiche aperte che richiedano anche capacità argomentative.

Le considerazioni fatte hanno suggerito l'esigenza di un intervento centrato in una prima fase a partire dal punto che tutte le indagini rilevano come delicato (cioè la scuola secondaria di primo grado), e da allargare successivamente fino a comprendere tutto l'arco scolastico. Attraverso tale intervento si vogliono individuare dei profili di apprendimento che tengano conto della complessità del fare matematica, e che considerino quindi non solo le conoscenze e abilità degli allievi ma anche le strategie-tipo con cui argomentano, razionalizzano, modellizzano, risolvono problemi in contesti matematici di varia natura. In questo modo sarà possibile intervenire didatticamente in modo mirato, cioè secondo i profili individuati, per favorire l'acquisizione di quegli strumenti culturali indispensabili per gli studi che seguono.

3 L'EDUCAZIONE MATEMATICA

Nel curriculum scolastico per gli studenti vanno poste nel giusto rilievo sia la funzione culturale della matematica, sia quella strumentale: la matematica è un sapere logicamente coerente e sistematico, caratterizzato da una forte unità culturale da un lato, e dall'altro è strumento essenziale per una comprensione quantitativa della realtà. Entrambi gli aspetti sono essenziali per una formazione equilibrata degli studenti: priva del suo carattere strumentale, la matematica si riduce a un puro gioco di segni senza significato; senza una visione globale, essa diventa una serie di ricette prive di metodo e di giustificazione. I due aspetti si intrecciano ed è necessario che l'insegnante curi entrambi in modo equilibrato lungo tutto il percorso di formazione. Dentro a competenze strumentali come eseguire calcoli, risolvere equazioni, leggere dati, misurare grandezze, calcolare probabilità, è infatti sempre presente un aspetto culturale, che collega tali competenze alla storia della nostra civiltà e alla complessa realtà in cui viviamo. D'altra parte l'aspetto culturale, che fa riferimento a una serie di conoscenze teoriche, storiche ed epistemologiche, con risvolti sulle competenze quali la padronanza delle idee fondamentali di una teoria, la capacità di situarle in un processo evolutivo, di riflettere sui principi e sui metodi impiegati, non ha senso senza il riferimento ai calcoli, alle applicazioni, al gioco delle ipotesi, ai tentativi ed errori per validarle, alle diverse dimostrazioni che evidenziano i significati di un enunciato matematico: essi costituiscono il terreno concreto e vivo da cui le conoscenze teoriche della matematica traggono alimento. In sostanza, nel curriculum scolastico è necessario condurre gli studenti alla padronanza di tecniche operative e, d'altro lato, alla capacità di collocare queste tecniche in un quadro teorico che le giustifichi. Calcoli e tecniche non sono fini a se stessi, ma trovano il loro significato nel contesto della risoluzione di problemi, sia interni alla matematica sia legati alla realtà. Raggiungere tutte le competenze indicate costituisce, perciò, un obiettivo di lungo termine che deve guidare tutto il corso dell'educazione matematica.

3.1 IL LABORATORIO DI MATEMATICA

Particolare rilievo riveste in m@t.abel, nella formazione degli allievi, il *laboratorio di matematica*.

La formazione matematica degli studenti, infatti, va costruita attraverso un attento lavoro di laboratorio. È solo un'illusione, peraltro molto diffusa, pensare di conoscere le cose per il solo fatto di aver appreso delle

parole. Per un'autentica assimilazione delle idee matematiche è invece fondamentale l'interazione che si sviluppa tra le persone durante lo svolgimento di attività.

Il laboratorio di matematica va visto, perciò, come un insieme strutturato di attività volte alla costruzione di significati degli oggetti matematici. Esso coinvolge persone (studenti ed insegnanti), strutture (aule, idonei strumenti, organizzazioni degli spazi e del tempo), idee (progetti, piani di attività didattiche, sperimentazioni). Gli strumenti da usare possono essere di varia natura, dai materiali più poveri e tradizionali, come carta, fogli quadrettati e trasparenti, spilli, riga e compasso, a quelli più recenti come software di geometria e di manipolazione simbolica, fogli elettronici, collegamenti Internet.

L'ambiente del laboratorio di matematica è in qualche modo assimilabile a quello di una bottega rinascimentale nella quale gli apprendisti imparavano facendo e vedendo fare, comunicando tra loro e con i maestri. Con una suggestiva metafora si può dire che l'aula scolastica diventa simile ad una sala di concerto dove gli studenti sono i suonatori, il docente è il direttore d'orchestra e i materiali che si utilizzano sono gli strumenti musicali.

La concezione della scuola come laboratorio è in Italia lontana nel tempo, anche se raramente realizzata. Circa un secolo fa il matematico Giovanni Vailati scriveva che:

“la scuola non può essere una mera ‘palestra mnemonica’ dove l’allievo apprende e troppo poco comprende. La scuola deve essere un laboratorio dove l’allievo, sotto la guida dell’insegnante, apprende ad addestrarsi e a risolvere questioni, a misurare e soprattutto a misurarsi e a mettersi alla prova di fronte ad ostacoli e a difficoltà, atti a stimolare la sua sagacia e a coltivare la sua iniziativa. Occorre rendere l’insegnamento della matematica più proficuo, più efficace e insieme più attraente”.⁷

Oggi più che mai è attuale il pensiero di Vailati.

⁷ Vailati, G. (1899), recensione di Laisant, C.-A., “La Mathématique: philosophie, enseignement”, in Vailati, G., *Scritti*, a cura di Quaranta, M. (1987), vol. III, Forni, Bologna, p. 261.

3.2 GLI ALUNNI IN DIFFICOLTÀ

Nonostante l'insegnamento della matematica sia dovunque avvertito come centrale nella proposta educativa complessiva, tuttavia i problemi di apprendimento in questa disciplina sono in aumento e riguardano sia alunni in difficoltà per la presenza di specifici deficit sia alunni svantaggiati per motivi sociali o familiari o per esperienze scolastiche negative. Questo è vero in determinate tipologie di scuola secondaria di secondo grado, la cui scelta è vissuta spesso come “ripiego” oppure deriva dalla ricerca di una scuola più operativa e concreta; ma può valere anche per studenti che, dopo un precedente confronto positivo con una matematica più operativa, stentano a ritrovarsi in una disciplina troppo spesso avvertita come pura sintassi.

È generalmente vero che gli studenti in difficoltà portano con sé un più basso bagaglio didattico, mancano di basi solide sui programmi dei livelli scolastici precedenti ed hanno maturato delle convinzioni e degli atteggiamenti di rifiuto, disistima e sfiducia nei confronti della disciplina, ma anche dell'istituzione, dell'apprendimento e perfino di se stessi. Si aggiungano poi difficoltà di tipo linguistico che riguardano gli studenti immigrati da altri Paesi, ma spesso non soltanto loro, e che coinvolgono sia il linguaggio in generale che (a maggior ragione) il linguaggio specifico della matematica.

D'altra parte la stessa conquista dell'autonomia personale non può prescindere dal possesso di (almeno) alcune competenze matematiche e, parimenti, l'esercizio della democrazia in una società complessa non può trascurare la padronanza di certe competenze, ad esempio grafiche o statistiche, o di abilità argomentative, aspetti collegabili entrambi in maniera diretta alla matematica.

A queste carenze le attività proposte dal progetto m@t.abel possono, proprio per la metodologia a cui esse si ispirano, offrire una valida risposta per più motivi:

- Rispettano l'unitarietà del soggetto di apprendimento, promuovendo il collegamento con altre discipline o con esperienze extrascolastiche.
- Stimolano il docente a costruire una relazione didattica tesa a una continua negoziazione di significati (Bruner)⁸ e di processi per rendere effettivo l'apprendimento, invitando lo studente a sperimentare

⁸ Bruner, Jerome S. (1992), *La ricerca del significato. Per una psicologia culturale*, Bollati Boringhieri, Milano.

una situazione dinamica senza trovarsi irrigidito in “classificazioni” prefissate. La difficoltà di apprendimento (e perfino la stessa disabilità fisica o cognitiva) da questo punto di vista può essere considerata una delle tante situazioni dell’esistenza; essa non deve impedire l’apprendimento e l’utilizzo “al massimo livello possibile” della matematica quanto di ogni altra disciplina.

- Formano gli insegnanti a un lavoro di tipo diverso: non “sociologicamente” diverso (come talora, anche in buona fede, si cerca di promuovere nei confronti degli alunni deboli) ma “culturalmente” diverso rispetto alla formazione precedente che essi stessi hanno avuto e a cui tuttora la maggior parte di loro ispirano il loro metodo di lavoro. L’attenzione rivolta agli studenti più deboli si rivela preziosa, in questa ottica, per costruire una proposta valida nei riguardi di ogni studente.

Coerentemente, non si tratta di semplificare la proposta o “abbassare il livello” delle richieste: si tratta di comprendere il senso reale dell’insegnare matematica e di riuscire a effettuare delle scelte le quali permettano al docente di leggere gli argomenti proposti come mezzi per raggiungere le competenze di base e allo studente di sperimentare gli stessi argomenti come ricchi di “senso”, collegandoli a proprie esperienze esistenziali.

Proprio la forte diversità individuale dei soggetti in difficoltà impedisce di indicare una strada univoca. A seconda delle situazioni, si tratterà di promuovere la manualità proponendo la realizzazione di misurazioni o di manufatti specifici... oppure di realizzare “sfide” fra studenti... oppure ancora di sperimentare la matematica come strumento di analisi o intervento sulla realtà, eventualmente ricorrendo al potentissimo strumento della narrazione e del gioco... Tutto questo nell’intento di guidare lo studente a colmare eventuali lacune preesistenti e ad acquisire un personale rapporto con la disciplina, i suoi concetti e strumenti.

Alcune delle attività proposte contengono al loro interno delle specifiche schede, che aiutano gli insegnanti a individuare, mediante una analisi a priori, i possibili punti di maggior difficoltà, e indicano eventuali strategie didattiche. I docenti sono comunque invitati a selezionare quali parti dell’attività possono meglio essere adatte per i propri alunni con difficoltà oppure quali attività (magari di altro livello scolastico) possono essere scelte, riadattate e proposte nell’intento di aiutare i propri studenti a raggiungere gli obiettivi di conoscenza e competenza opportuni all’interno della propria Zona di Sviluppo Prossimale (Vygotskij)⁹.

⁹ Vygotskij, L. (1990), *Pensiero e linguaggio. Ricerche psicologiche*, Laterza, Roma-Bari.

4 I CORSI DI FORMAZIONE m@t.abel

I progetti, m@t.abel prima e PON m@t.abel poi, introducono gli insegnanti alle problematiche indicate attraverso esempi concreti di attività da svolgere in classe e si avvalgono per la loro realizzazione di uno strumento tecnologico, la piattaforma PuntoEdu, che consente ai partecipanti di discutere e condividere le proprie esperienze di formazione. La metodologia seguita è di estrema attualità in quanto offre ai docenti di matematica una formazione professionale sul campo utilizzando tutti gli strumenti che possono contribuire a un cambiamento fattivo: dalle situazioni didattiche concretamente sperimentate nelle classi ai mezzi tecnologici più sofisticati oggi disponibili.

Le attività proposte, dopo una breve presentazione in incontri in presenza, sono dapprima rese familiari in un ambiente virtuale disponibile sulla piattaforma PuntoEdu adottata dal progetto e successivamente sperimentate in classe.

La metodologia PuntoEdu, realizzata da INDIRE - ANSAS, permette agli insegnanti di confrontare le loro esperienze concrete in tempo reale sotto la guida di un tutor e quindi di validare la potenzialità formativa delle attività didattiche proposte nonché l'effettiva acquisizione di competenze da parte degli studenti.

Il modello PuntoEdu è un ambiente aperto e interattivo pensato principalmente per favorire lo sviluppo professionale di chi opera nel campo scolastico tramite l'attivazione di strategie atte a sollecitare il fare e l'agire dei corsisti. PuntoEdu non si basa sulla logica della trasmissione di contenuti, ma fonda le proprie basi su quella delle attività, dell'operatività, del coinvolgimento attivo del soggetto in formazione.

La strutturazione dei diversi tipi di risorse previsti dal modello PuntoEdu (attività, materiali di studio, forum, laboratori sincroni, ecc.) consente di attivare una pluralità di momenti formativi che offrono la possibilità di alternare e correlare le pratiche didattiche, gli aspetti teorici del fare educativo, la riflessione sulle esperienze e la sistematizzazione delle stesse.

Si tratta quindi di un modello di formazione in cui l'attività concreta di insegnamento e la riflessione teorica su di essa avvengono contemporaneamente in un ambiente in cui sia le esperienze sia le riflessioni sono continuamente discusse e condivise. La classe virtuale dei docenti che la piattaforma permette rappresenta un esempio di tirocinio in cui l'insegnante confronta la realizzazione della sperimentazione in classe con quella dei colleghi e riflette insieme con loro sulle problematiche emerse e sui risultati conseguiti: sperimentazione e riflessione teorica si intrecciano tra loro promuovendo una formazione in servizio in cui teoria e pratica

sono un tutt'uno. Il modello adottato è in questo senso profondamente innovativo: rompe infatti la tradizionale formazione in cui la teoria precede la pratica ed è da questa spesso drammaticamente scissa. Complessivamente la metodologia dei corsi di formazione m@t.abel può essere descritta molto bene con le parole di Martin Dougiamas, creatore della piattaforma Moodle, esperto in insegnamento a distanza nonché fautore delle teorie cosiddette costruttiviste, anch'esse ampiamente presenti nel progetto:

“Una prospettiva costruttivista vede chi impara come attivamente impegnato nel creare significati, e l'insegnare con questo approccio significa ricercare quello che gli studenti possono analizzare, investigare, quello per cui possono collaborare, condividere, costruire e sviluppare su ciò che essi già sanno, piuttosto che ricercare quali fatti, abilità e processi essi possono ripetere meccanicamente. Per fare questo realmente, un insegnante ha bisogno di essere anche uno studente e un ricercatore, di sforzarsi per una più grande consapevolezza dell'ambiente e dei partecipanti in una data situazione di insegnamento allo scopo di adattare continuamente le sue azioni per impegnare gli studenti nell'apprendimento, usando il costruttivismo come guida”.¹⁰

¹⁰ Dougiamas, M. (1999), *Moodle - A web application for building quality online courses*. <http://moodle.com/>.

5 LE RISORSE

5.1 LE RISORSE CULTURALI

In una prima fase il progetto m@t.abel si è avvalso dei materiali prodotti in un progetto pluriennale realizzato tra il 2000 e il 2005 nell'ambito delle finalità previste da un Protocollo d'Intesa, sottoscritto nel 1993 dall'allora Ministero della Pubblica Istruzione e dall'UMI ed esteso nel 1999 alla SIS. Scopo dell'intesa era ed è una sempre maggior qualificazione dell'insegnamento della matematica nella scuola italiana. Tali materiali sono stati raccolti nei tre volumi *La Matematica per il cittadino*, un progetto per l'insegnamento della matematica dai 6 ai 19 anni.

Successivamente sono stati elaborati numerosi altri materiali specifici per il progetto m@t.abel; questi materiali sono costituiti sempre da attività da svolgere in classe e da elementi per le relative prove di verifica.

Tutte le attività propongono un insegnamento/apprendimento della matematica in cui sono intrecciati tre aspetti fondamentali:

- i contenuti disciplinari necessari per risolvere i problemi;
- le situazioni e i contesti in cui si pongono i problemi e che costituiscono uno stimolo per gli allievi;
- i processi che l'allievo deve attivare per affrontare la situazione problematica.

I contenuti sono riconducibili a quattro nuclei fondamentali, presenti nei curricula di molti Paesi del mondo, nonché nelle prove OCSE-PISA e nelle prove INVALSI, anche se con termini diversi. Si tratta di nuclei sostanzialmente identici per tutto il percorso scolastico considerato:

- Numeri
- Geometria
- Relazioni e funzioni
- Dati e previsioni

Le situazioni e i contesti fanno riferimento ad alcune tipologie fondamentali, che si ritrovano anch'esse in molti quadri di riferimento dei rilevamenti delle competenze matematiche degli allievi:

- Situazioni personali
- Situazioni scolastiche
- Situazioni ludiche o legate a racconti
- Situazioni pubbliche o di lavoro
- Situazioni matematiche e più in generale scientifiche

I processi sono legati alle competenze degli allievi: queste ultime consistono nella capacità di individuare, tra le conoscenze possedute, quelle opportune per affrontare una certa situazione problematica e di utilizzarle in forma mirata alla soluzione del problema proposto. La letteratura indica vari tipi di processi e competenze e li accorpa in alcune categorie fondamentali. Ad esempio l'edizione 2012 dell'indagine OCSE-PISA considera le seguenti competenze matematiche:

- Comunicare
- Matematizzare e modellizzare
- Rappresentare
- Ragionare e argomentare
- Progettare strategie per risolvere problemi
- Usare il linguaggio simbolico, formale e tecnico e le operazioni
- Impiegare strumenti matematici

La *Matematica per il cittadino* è particolarmente attenta ai processi ed alle competenze e considera, oltre i precedenti, anche i seguenti processi:

- Definire
- Congetturare e verificare
- Dimostrare

- Misurare
- Progettare
- Visualizzare
- Classificare

Tali processi e competenze possono essere considerati a livelli diversi di approfondimento (ad esempio OCSE-PISA considera tre livelli in ordine crescente di complessità: *riproduzione, connessioni, riflessione*). La *Matematica per il cittadino* ha raggruppato gran parte dei processi sopra elencati in tre nuclei fondamentali:

- Misurare
- Risolvere e porsi problemi
- Argomentare, congetturare, dimostrare (quest'ultimo solo nel ciclo secondario)

Per i piani m@t.abel e PON m@t.abel sono stati elaborati 80 esempi di attività, 40 per la scuola secondaria di primo grado e 40 per il primo biennio della scuola secondaria superiore. Essi sono stati strutturati da un gruppo di docenti universitari e della scuola integrando la logica del progetto UMI *La Matematica per il cittadino* con quella dell'e-learning e infine implementati sulla piattaforma PuntoEdu, dove appaiono amichevoli anche grazie all'aggiunta di animazioni, filmati ecc. a cura di INDIRE - ANSAS.

Gli esempi sono suddivisi in egual numero tra i quattro nuclei. Essi prendono in considerazione i principali nodi concettuali della matematica ed evidenziano che, per affrontarli, gli allievi devono attivare molti dei processi sopra elencati.

Lo svolgimento delle attività non consiste in una serie di spiegazioni a priori da parte dell'insegnante, ma in un lavoro che gli studenti, singolarmente o in gruppo, sempre sotto la guida attenta del docente, devono sviluppare per acquisire le competenze matematiche coinvolte.

5.2 LE RISORSE ISTITUZIONALI

I piani m@t.abel e PON m@t.abel vedono il concorso di diverse Istituzioni e Associazioni disciplinari, ciascuna delle quali è presente con vari esperti e in diversi momenti:

- MIUR
- INDIRE
- USR (Uffici Scolastici Regionali)
- UMI-CIIM
- SIS

È stata essenziale inoltre la partecipazione di docenti di scuola secondaria di primo e di secondo grado in qualità di esperti.

I piani sono coordinati a livello nazionale da un CTS, cui partecipano i rappresentanti di MIUR, INDIRE, UMI-CIIM e SIS. Il CTS elabora il progetto di formazione, ne cura e supervisiona l'attuazione. Il piano PON m@t.abel prevede anche un monitoraggio a cura dell'INVALSI. Tale monitoraggio coinvolge, al momento, le classi della scuola secondaria di primo grado.

I docenti coinvolti si distinguono in autori delle attività e in tutor.

Gli autori sono docenti molto preparati sia sotto il profilo delle competenze matematiche sia dal punto di vista delle metodologie, ivi comprese le tecnologie informatiche richieste dall'e-learning. Con la collaborazione del CTS, gli autori hanno provveduto alla ristrutturazione dei materiali tratti dalla *Matematica per il cittadino* e alla stesura dei nuovi materiali.

I docenti tutor sono globalmente 402 a livello nazionale e 143 nelle quattro regioni coinvolte nel PON. I tutor sono selezionati su base regionale in numero proporzionale alle scuole esistenti nel territorio, con riferimento alle seguenti caratteristiche:

- competenze matematiche;
- competenze nell'utilizzo delle tecnologie informatiche per l'insegnamento e l'apprendimento;
- capacità relazionali per la conduzione di gruppi di lavoro.

La loro formazione è stata perfezionata in corsi condotti dal CTS, dagli esperti di INDIRE e dagli autori, corsi svolti in presenza in varie sedi e online.

Oggetto della formazione sono stati seguenti temi:

- obiettivi formativi del piano m@t.abel;
- contenuti dei materiali didattici;
- metodologie innovative per l'insegnamento della matematica con particolare riferimento alla didattica laboratoriale;
- metodologie dell'e-learning e uso della piattaforma PuntoEdu;
- problematiche della formazione in presenza e virtuale.

I piani prevedono l'intervento degli USR per organizzare i corsi di formazione dei docenti.

5.3 LE RISORSE TECNOLOGICHE

Il progetto m@t.abel si avvale della piattaforma PuntoEdu che usa un'ampia dotazione tecnologica permettendo un utilizzo modulare degli strumenti sincroni ed asincroni e consentendo ai tutor di organizzare la didattica secondo le proprie finalità e necessità.

Ogni gruppo di lavoro, composto da un numero limitato di corsisti che si riuniscono per collaborare, confrontarsi e discutere su una tematica o un progetto, ha a disposizione un'area di interazione dedicata.

La sezione "il mio gruppo" all'interno della piattaforma è un laboratorio che può essere progettato e personalizzato e che dà l'opportunità di lavorare a distanza attraverso una serie di strumenti che consentono di organizzarsi, discutere, incontrarsi, scambiare risorse digitali e progettare. Gli strumenti disponibili permettono insomma di svolgere attività in una dimensione di collaborazione e cooperazione.

"Il mio gruppo" è composto dai seguenti strumenti:

Copertina

Si tratta di una pagina introduttiva inserita dal tutor, relativa al gruppo e nella quale sono esplicitati gli obiettivi e il tema che verrà affrontato nel gruppo stesso.

Programma di lavoro

È un pannello che consente al tutor di organizzare le attività dell'intero periodo di lavoro previsto condividendole con i corsisti. Nel pannello del programma di lavoro il tutor suddivide il lavoro in fasi con date di inizio e di fine per ciascuna di esse. Il sistema mette in evidenza con un colore diverso la fase in atto in quel momento ricordando alla piccola comunità del gruppo in che momento di lavoro ci si trova ed in quali strumenti si sviluppa il lavoro.

5.3.1 Strumenti collaborativi

Nella parte centrale della schermata si trova il pannello con tutti gli strumenti collaborativi in dotazione al gruppo. Il tutor, tramite il suo pannello di controllo, può attivare e disattivare gli strumenti della classe in base alle esigenze didattiche e organizzative relative alla singola fase di lavoro.

Gli strumenti sono così suddivisi:

Condivisione materiali

È uno strumento per condividere materiali sui temi trattati nel percorso di lavoro del gruppo tra i momenti in presenza e l'interazione online. In quest'area è possibile documentare la realizzazione di un file nel suo divenire: gli utenti hanno infatti la possibilità di creare sottocartelle, nominarle e rinominarle secondo le proprie necessità.

Forum asincrono

Si tratta di uno strumento che consente ai membri del gruppo di discutere e confrontarsi in rete, in modo asincrono. I corsisti e il tutor possono scrivere dei messaggi che verranno pubblicati in uno spazio comune; ad ogni messaggio potranno seguire diverse risposte che rispettino la tematica del messaggio originario.

Laboratorio sincrono

È un laboratorio che offre la possibilità di lavorare in gruppo in modo collaborativo ed in tempo reale. Si tratta di una comunicazione interpersonale fra due o più utenti collegati contemporaneamente. Le attività si svolgono con modalità simili a quelle di un gruppo che lavora in presenza: il moderatore regola gli interventi e propone il percorso di lavoro.

Durante l'attività ogni partecipante può: intervenire in audio; comunicare in tempo reale tramite una chat testuale; vedere i documenti di lavoro proposti dal moderatore o dai colleghi; fare operazioni di modifica sui documenti in condivisione.

Chat testuale

Si tratta di un ambiente di comunicazione che consente di interagire in modo sincrono; può essere sia una chat di tipo privato sia di tipo pubblico e prevede la possibilità di invitare utenti o essere invitati da questi ultimi.

Blog/Wiki

È uno strumento di condivisione e di collaborazione che riunisce le caratteristiche del blog (web+log: diario di bordo sul web) e del wiki (l'applicazione che consente di creare contenuti collaborativi).

Si tratta di uno strumento di editoria sul web che permette al tutor di inserire post che possono essere commentati dai corsisti. I post inseriti in modalità wiki possono essere modificati dai membri del gruppo apportando aggiunte e modifiche al testo originario, e in ogni momento è possibile prendere visione e ripristinare le vecchie versioni.

5.3.2 Strumenti di gestione

Gli strumenti di gestione permettono di programmare dettagliatamente l'attività:

Avvisi e Calendario

Sono strumenti collegati tra loro che servono entrambi per la programmazione di fasi di lavoro, incontri in presenza, scadenze, incontri sincroni, ecc.

Sottogruppi

È una sezione in cui ciascun corsista può visualizzare il link di ingresso ad uno o a più sottogruppi a cui è stato associato dal tutor: al suo interno troverà un ambiente del tutto simile al gruppo di lavoro finora descritto, personalizzato ad hoc dal tutor.

Invia un messaggio ai tuoi compagni di gruppo

Si tratta di un'applicazione che permette di inviare e-mail sulla posta privata di uno o più componenti del gruppo i quali ricevono la comunicazione come proveniente dall'indirizzo privato del mittente.

Il gruppo

È uno spazio dedicato all'identità del gruppo di lavoro e in cui sono elencati i nomi di tutti i membri del gruppo compreso quello del tutor.

6 LA REALIZZAZIONE DEL PROGETTO

6.1 ARTICOLAZIONE

Il progetto m@t.abel, inserito in un contesto di formazione che coinvolge anche le discipline linguistiche e le scienze, ha visto l'avvio nel 2005 e si è articolato in quattro fasi:

1. progettazione a cura del CTS;
2. stesura ed immissione in piattaforma del materiale didattico;
3. individuazione e formazione dei tutor;
4. realizzazione dei corsi di formazione, come di seguito descritta.

La seconda, la terza e la quarta fase si sono ripetute successivamente, con cadenza pressoché annuale.

L'attività di formazione dei docenti, iniziata su scala nazionale nel 2006, ha avuto una prima fase pilota con l'obiettivo della validazione del progetto e la sua messa a punto. Nel 2007 essa è entrata a regime. Dal 2008, finanziato dai fondi europei FSE, il progetto è stato ampliato nelle "regioni convergenza" del Sud Italia (Calabria, Campania, Puglia e Sicilia) dando vita al piano PON m@t.abel. Questa distinzione tra i piani non ha modificato la filosofia m@t.abel, ma ha anzi permesso agli attori della formazione di rielaborare e arricchire il progetto formativo.

La formazione ha come obiettivo la conoscenza del materiale didattico presente in piattaforma, la padronanza delle indicazioni metodologiche proprie del m@t.abel e la realizzazione di un programma di sperimentazione che rappresenta una parte integrante della formazione stessa.

Essa è costituita da incontri in presenza e online, sotto la guida di un tutor, e dalla sperimentazione in classe di alcune delle attività. Le ore di formazione in presenza nel piano nazionale, inizialmente 12, sono arrivate fino a 20. Nel piano PON m@t.abel le ore in presenza sono salite, invece, a 26 e quelle online a 40. Vi sono,

inoltre, delle ore dedicate ad una riflessione personale volta alla produzione di documenti che nel piano PON m@t.abel assommano a 40.

Il primo incontro in presenza è previsto all'inizio dell'anno scolastico al fine di consentire agli insegnanti di programmare nella loro scuola il Piano dell'Offerta Formativa (POF) coerentemente con le proposte del progetto. Ciò, tuttavia, non è sempre avvenuto per motivi organizzativi e di ordine tecnico. L'ultimo degli incontri in presenza si svolge alla conclusione dell'attività formativa e di sperimentazione.

Entrambi i piani hanno una struttura organizzativa che si avvale per l'erogazione della formazione in presenza delle scuole selezionate dall'USR e dal MIUR. Le sedi degli istituti mettono a disposizione spazi attrezzati e laboratori e collaborano con i tutor e l'INDIRE per sostenere e promuovere i due piani.

6.2 REALIZZAZIONE DEI CORSI DEL PIANO NAZIONALE m@t.abel

La formazione nel piano nazionale m@t.abel avviene secondo il modello sopra descritto (incontri in presenza, incontri online, sperimentazione, produzione di documenti) con gruppi di persone il cui numero è definito localmente in base all'entità delle richieste di formazione pervenute. Nel piano PON m@t.abel non possono essere meno di 15. Qui di seguito sono illustrate le varie fasi.

1. Formazione iniziale in presenza

Finalizzata ai seguenti aspetti:

- presentazione del progetto;
- illustrazione della metodologia d'insegnamento/apprendimento m@t.abel: il laboratorio di matematica;
- presentazione del materiale didattico: obiettivi, nodi concettuali, metodologia;
- analisi approfondita di una delle attività sotto il profilo concettuale e metodologico con il supporto dell'ambiente e-learning;
- lettura della scheda di lavoro per il corsista: discussione sull'utilizzo concreto in classe delle attività didattiche disponibili in piattaforma;
- conoscenza dell'ambiente e-learning (piattaforma INDIRE) e suo uso;
- definizione di un protocollo di sperimentazione.

2. Formazione online

Finalizzata alla conoscenza del materiale didattico (completamento) presente in piattaforma e alla condivisione del programma di sperimentazione. Ciascun corsista conduce un'attenta analisi delle attività proposte che discute e condivide con i colleghi del corso in una classe virtuale.

Tra esse sceglie due attività coerenti con il proprio progetto didattico e le sperimenta in classe secondo il protocollo concordato.

3. Sperimentazione in classe

Durante la sperimentazione il gruppo dialoga con il supporto della piattaforma e discute online con il tutor e con i colleghi sui problemi didattici e tecnici che via via si presentano.

4. Produzione di documenti

Sulla sperimentazione di ciascuna attività il corsista redige un "Diario di bordo" secondo le indicazioni di una scheda di lavoro concordata nel gruppo con il tutor.

Nel "Diario di bordo" il corsista:

- esplicita i principali nodi concettuali cui l'attività scelta fa riferimento;
- descrive l'esperienza svolta in classe e la metodologia usata (schede di lavoro, lavoro di gruppo, discussione matematica in classe, software utilizzato, ecc.);
- valuta come l'attività è stata recepita dagli studenti e il modo in cui hanno assolto al loro compito;
- rileva le difficoltà incontrate dagli studenti nella comprensione dei vari concetti matematici e le metodologie di superamento;
- commenta le prove di verifica proposte e i relativi risultati.

5. Incontro finale in presenza

Alla fine dell'attività di sperimentazione si organizza un incontro per la discussione delle attività realizzate in classe al fine di valutare l'esperienza in modo condiviso.

Nelle varie fasi il tutor funge da moderatore del gruppo: guida i docenti nella realizzazione delle attività; facilita la

soluzione dei problemi incontrati nel gruppo (di natura concettuale, metodologica o tecnica); raccoglie le osservazioni dei docenti e ne compie una sintesi da archiviare; approfondisce, eventualmente, le problematiche emerse.

6.3 REALIZZAZIONE DEI CORSI DEL PIANO PON m@t.abel

Come si è già accennato il progetto PON m@t.abel amplia e arricchisce l'offerta formativa legata al m@t.abel "nazionale"; ne consegue che l'impianto della formazione è simile a quanto descritto al paragrafo 6.2.

Va specificato però che la formazione si articola in un arco di tempo più ampio che copre gran parte dell'anno scolastico (ottobre-maggio); di conseguenza il CTS ha elaborato una sceneggiatura del corso più articolata.

1. Formazione iniziale in presenza

- l'avvio della formazione avviene con un incontro in presenza di 4 ore in cui vengono presentati il percorso formativo, gli obiettivi, i nodi concettuali e la metodologia;
- 6 incontri in presenza in cui vengono analizzati i percorsi didattici e i corsisti scelgono le quattro attività, una per ogni nucleo tematico, da sperimentare in classe con gli alunni;
- l'ultimo incontro in presenza, di 4 ore, in cui è prevista una riflessione generale sul percorso formativo e sulle sperimentazioni in classe.

2. Formazione online

- analisi dei materiali;
- partecipazione alle attività online predisposte dal tutor (ad es. laboratori sincroni);
- attività in autogestione.

3. Sperimentazione in classe

- sperimentazione con gli alunni di 4 attività presenti in piattaforma, una per ogni nucleo tematico.

4. Autogestione

- riflessione sull'offerta formativa e analisi della stessa;

- redazione di un “Diario di bordo” per ciascuna attività sperimentata.
Nell’ambito del progetto PON m@t.abel il “Diario di bordo” è composto da tre documenti: un report sulle motivazioni della scelta; un questionario a risposta chiusa sulla sperimentazione; un resoconto sulla sperimentazione in cui il corsista racconta in modo dettagliato l’andamento della stessa, analizza i processi all’interno della classe, trae le conclusioni sui risultati ottenuti e avvia un percorso di autoanalisi sul suo modo di insegnare.



7 IL MONITORAGGIO

7.1 I SOGGETTI COINVOLTI

L'INDIRE ha affidato le azioni di monitoraggio di PON m@t.abel negli anni 2007/10 a ricercatori del Nucleo Territoriale ex IRRE Lombardia.

Sulla base di indicazioni e finalità condivise con INDIRE, il gruppo di lavoro interno all'ex IRRE Lombardia ha sviluppato in autonomia il progetto di monitoraggio, delineandone obiettivi e strumenti, svolgendo le azioni previste e procedendo all'elaborazione dei dati e alla produzione di un report finale.

I soggetti monitorati sono stati principalmente i tutor per il loro ruolo di conduttori e facilitatori dei gruppi, i corsisti e i dirigenti scolastici coinvolti.

7.2 IL FOCUS DELLA RILEVAZIONE

La finalità del progetto di monitoraggio è rilevare gli indicatori sul grado di efficacia e di gradimento dei corsi assumendo come oggetto privilegiato di rilevazione il raggiungimento degli obiettivi esplicitamente indicati nel documento programmatico del progetto.

In particolare l'analisi si concentra su:

- il modello formativo proposto (equilibrio delle diverse fasi del percorso, integrazione e scansione temporale dei momenti di formazione in presenza e a distanza);
- l'ambiente di apprendimento e i materiali didattici disponibili in piattaforma (accessibilità, strutturazione, spendibilità didattica);
- i processi di lavoro e di apprendimento attivati nelle classi virtuali e negli incontri in presenza;
- le azioni di tutoring;
- i processi attivati durante la sperimentazione in classe (sviluppo simultaneo di acquisizioni teoriche e concreta prassi didattica, riflessione sul proprio agire professionale).

7.3 LA PROCEDURA

Il monitoraggio si svilupperà attraverso azioni indirizzate sia all'universo dei corsisti e dei tutor coinvolti nel percorso formativo, sia a un campione selezionato definito in modo da rappresentare almeno il 10% dei corsi attivati per ogni regione.

I corsisti delle classi campione hanno svolto dei focus group, per ricavare i giudizi "a caldo", gli umori e le effettive esperienze, mentre ai tutor delle classi campione sono state proposte interviste individuali o di gruppo per raccogliere informazioni sull'andamento dei corsi.

I questionari, invece, sono stati resi disponibili a tutti i soggetti per rilevare il grado di efficacia e di gradimento del corso. Inoltre, per le classi campione si è proceduto ad analizzare i prodotti dei corsisti, in particolare i "Diari di bordo", sulla base di una griglia costruita per rilevare l'andamento della sperimentazione in classe.

L'insieme dei dati è stata corredata, infine, dai dati di tracciamento della piattaforma, che permettono di verificare l'effettivo uso della piattaforma (al di là delle dichiarazioni) ed eventualmente anche la qualità delle comunicazioni sviluppatesi all'interno degli strumenti della classe virtuale.

Tutti i dati quantitativi sono stati elaborati mediante algoritmi statistici; visualizzati mediante grafici e tabelle di sintesi e sono stati corredata dalla relativa analisi interpretativa. Il report finale, in relazione agli indicatori previsti, sintetizza i risultati raggiunti, i punti di forza e le criticità.

7.4 GLI STRUMENTI

Il piano di monitoraggio si basa su una metodologia quali-quantitativa.

Gli strumenti che vengono utilizzati nella rilevazione sono:

- Questionario iniziale rivolto ai corsisti finalizzato a raccogliere dati sulle caratteristiche.
- Anagrafiche professionali sulle competenze digitali e disciplinari in ingresso, sulle concezioni

relative alla matematica e al suo insegnamento, sulle motivazioni e aspettative degli insegnanti in formazione.

- Questionario finale diversificato per i due profili di soggetti coinvolti: corsista e tutor. I due questionari saranno strutturati in modo “speculare”, così da poter raccogliere, da prospettive diverse, dati confrontabili. I questionari sono pensati per rilevare il grado di soddisfazione degli attori coinvolti e per raccogliere eventuali indicazioni di miglioramento. In particolare:
 - il questionario rivolto ai corsisti consentirà di raccogliere dati sul grado di utilizzo della Rete e degli strumenti di comunicazione online, sulla qualità del lavoro svolto dal tutor, sul grado di fruibilità dei materiali messi in Rete e dei percorsi disciplinari proposti, sulla possibilità di implementare i contenuti della formazione nel contesto scolastico;
 - il questionario rivolto ai tutor, accanto ai temi proposti nel questionario corsisti, indagherà la percezione del ruolo di tutoring, la formazione ricevuta, il giudizio rispetto al modello formativo.
- Griglia di analisi dei “Diari di bordo” redatti dai corsisti durante la fase di sperimentazione in classe per rilevare le dinamiche, i processi di lavoro, di apprendimento e di meta-riflessione dei docenti rispetto a questa fase del percorso formativo.
- Analisi dei dati di tracciamento della piattaforma per rilevare le tipologie d’uso dello strumento, le funzioni assolte, i livelli di utilizzo delle classi virtuali.



8 CONCLUSIONI

Le migliori conclusioni potrebbero essere tratte solo dagli insegnanti che partecipano a m@t.abel e a PON m@t.abel. Dai questionari che essi compilano e dai contatti che il CTS ha periodicamente con loro emerge comunque l'alto gradimento per questo progetto, anche se la sua realizzazione richiede un certo impegno. Nei paragrafi precedenti si è data schematicamente un'idea del progetto e dei motivi che sono alla base di tale successo. Qui si sintetizzano per punti i suoi aspetti più innovativi.

In sintesi, si può dire che m@t.abel (e PON m@t.abel):

1. Raccoglie le istanze più attuali provenienti dalla ricerca didattica internazionale e le cala nella realtà effettuale della scuola italiana. La prima componente è assicurata dai contributi dati al progetto da ricercatori ed esperti italiani in didattica della matematica; la seconda è stata ottenuta col grande lavoro degli insegnanti della scuola, impegnati come autori delle attività didattiche proposte. Si pone l'accento anche sul fatto che si tratta di una collaborazione che vede coinvolti agenti diversi, i quali esprimono le diverse competenze necessarie alla realizzazione del progetto: MIUR, INDIRE, UMI, SIS.
2. È la prosecuzione naturale di proposte didattiche innovative avanzate nei primi anni 2000 dalle associazioni professionali UMI e SIS in collaborazione col MIUR nell'ambito di un Protocollo d'Intesa firmato tra queste e il Ministero. Il risultato della collaborazione era stato il materiale della *Matematica per il cittadino*: un curriculum unitario per la matematica dai 6 ai 19 anni, con duecento esempi di attività didattiche ed elementi di prove di verifica. Tali proposte curriculari sono alle base di tutte le "Indicazioni" elaborate dal Ministero negli anni successivi.
3. Adegua le proposte di cui al punto precedente in forma opportuna rispetto alla tecnologia presente nella scuola, producendo parimenti, grazie al contributo importante dell'INDIRE, un materiale adatto alla formazione cosiddetta "blended" tramite piattaforma in Rete. Quindi si ha un inserimento delle TIC non solo nella pratica scolastica con gli allievi, ma anche nelle modalità stesse dell'aggiornamento degli insegnanti.
4. Unifica due componenti che tipicamente erano divisi in momenti successivi nell'aggiornamento degli insegnanti: l'aggiornamento vero e proprio e la sperimentazione in classe. Nel progetto at-

tuale, entrambi crescono insieme in un rapporto dialettico di arricchimento reciproco col supporto del tutor responsabile della piattaforma.

5. Come conseguenza del punto precedente, produce una crescita professionale dell'insegnante attraverso la formazione di *comunità di pratica* nelle scuole, che permettono l'effettivo cambiamento delle pratiche di insegnamento, con un'interazione effettiva del curricolo ideale su quello concretamente sviluppato in classe.
6. Introduce nelle pratiche in classe la necessità dell'*osservazione dei processi* e non la sola attenzione ai prodotti. La compilazione del "Diario di Bordo", insieme con le discussioni in piattaforma di quanto avviene in classe, è un supporto allo sviluppo di tali metodi osservativi, che costituiscono un fattore essenziale per la *valutazione formativa* degli allievi.
7. Esplicita i legami con i quadri valutativi PISA e INVALSI. È noto che la diffusione di strumenti valutativi esterni alla fine dei cicli scolastici è un forte incentivo alla modificazione dei metodi e all'innovazione dei contenuti. M@t.abel offre un concreto supporto agli insegnanti che decidano di lavorare in questa direzione.

Il materiale è ora presente nel sito "Risorse per docenti dai progetti nazionali"¹¹, accessibile a tutti gli insegnanti italiani; vi è inoltre la possibilità di organizzare su tutto il territorio delle "regioni convergenza" (Calabria, Campania, Puglia, Sicilia) corsi introduttivi ai suoi contenuti; essi metteranno in grado gli insegnanti interessati di sperimentare i materiali al fine di attuare al meglio quanto prescritto dalle nuove "Indicazioni".

Per tutti questi motivi si ritiene che il progetto, pur con le difficoltà di gestione che inevitabilmente si sono incontrate e si incontreranno, rappresenti un concreto supporto offerto ai colleghi della scuola secondaria di primo e secondo grado. Naturalmente tutto è migliorabile, e il CTS sta tenendo conto e terrà conto di tutte le osservazioni, le critiche e i suggerimenti che i colleghi hanno espresso ed esprimeranno.

¹¹ http://risorsedocentipon.indire.it/home_piattaforma/

9 RIFERIMENTI

Oltre ai testi e ai siti Internet citati nelle note di questo volume, vista la vastità del tema, si rimanda alle informazioni bibliografiche e sitografiche contenute nelle unità didattiche m@t.abel.



LE ATTIVITÀ DEI PIANI m@t.abel

In questa sezione sono presentate le attività che costituiscono l'offerta formativa dei piani m@t.abel e alcuni possibili percorsi didattici. Tali attività non esauriscono tutti gli argomenti dei curricoli, ma hanno l'ambizione di fornire indicazioni metodologiche articolate su come affrontare alcuni nodi concettuali di particolare importanza per la formazione matematica degli studenti.

Con l'espressione "nodi concettuali" si intende fare riferimento a concetti tematici centrali in un percorso didattico, a ostacoli epistemologici o a difficoltà cognitive non banali che gli studenti solitamente incontrano. Spesso, queste difficoltà sono dovute, oltre che a questioni epistemologiche, anche a questioni didattiche come l'uso di stereotipi nei libri di testo, ai conflitti tra linguaggio naturale e linguaggio matematico, alla confusione tra percezione e teoria relativamente all'osservazione delle figure, e così via. Le attività costruite sono significative e adeguate a trattare i nodi concettuali individuati.

I PERCORSI

L'organizzazione delle attività segue il filo di un possibile percorso didattico, in continuità dal primo al secondo ciclo. Per ogni nucleo tematico è stato costruito, infatti, un percorso che indica un ordine temporale di svolgimento delle varie attività proposte. L'obiettivo è quello di dare all'insegnante una proposta di possibile sequenza logico-temporale delle varie attività all'interno di un determinato nucleo. Si tratta, ovviamente, solo di possibili scelte fra alcuni dei tanti percorsi che possono essere realizzati a partire dalle indicazioni curricolari.

Devono essere visti essenzialmente come una proposta e non come indicazioni prescrittive. Ciascun insegnante potrà confrontare le indicazioni fornite con la propria programmazione curricolare o con quella condivisa del proprio istituto.

Sono stati costruiti altri due possibili percorsi di sequenze di attività, per ciascuno dei due livelli scolari (scuola secondaria di primo e di secondo grado), in modo da toccare i vari nuclei tematici. Il primo è costituito da

attività che prestano particolare attenzione ai problemi di comprensione e comunicazione di un testo e, quindi, ai delicati problemi di transizione dal linguaggio naturale al linguaggio specifico della matematica; il secondo, invece, è costituito da attività che riguardano la modellizzazione e la risoluzione di problemi.

1. Numeri

Il nucleo “Numeri” è indubbiamente uno dei punti fondamentali dell’insegnamento della matematica in tutta la scuola secondaria: sono insiti in esso concetti e capacità di calcolo alla base di gran parte della matematica. Per questo il tema va affrontato con attenzione, in modo che quei concetti e quelle capacità di calcolo siano acquisiti in modo corretto, motivato, e rimangano quindi stabilmente nelle conoscenze e nelle competenze degli alunni.

Le attività si pongono proprio in quest’ottica, cercando situazioni ricche di spunti che aiutino a inquadrare i concetti in questione, ad approfondirli e a capirne l’importanza.

Il nucleo “Numeri” comprende argomenti che sono in genere affrontati all’inizio della secondaria di primo grado (numeri primi, operazioni con frazioni, ecc.), poi i vari sistemi numerici (in particolare razionali e reali), ordini di grandezza e stime e infine l’introduzione graduale di un linguaggio simbolico con il calcolo di espressioni algebriche.

Nella didattica tradizionale veniva dato molto spazio ad esercizi di calcolo su espressioni numeriche e algebriche. Talvolta, però, si trattava di esercizi piuttosto ripetitivi, volti più ad un addestramento che a una reale comprensione dei concetti.

Oggi viene sottolineato che la sicurezza nel calcolo si raggiunge anche con la consapevolezza dei procedimenti seguiti; in questo quadro è molto importante un uso appropriato di strumenti elettronici di calcolo. Ugualmente viene sottolineata la necessità di essere in grado di stimare l’ordine di grandezza e la plausibilità dei risultati ottenuti: questa capacità è spesso un punto debole comune a tutti gli ordini di scuola.

Infine, ricordiamo che se da un lato è cruciale raggiungere sicurezza nel calcolo con i numeri razionali, dall’altro va compresa la necessità, sia pratica sia teorica, delle successive estensioni a partire dall’insieme dei numeri naturali.

NODI CONCETTUALI E ATTIVITÀ

Il tema *Numero* è spesso affrontato nelle attività di accoglienza degli alunni che provengono dalla scuola primaria: si offre quindi l'occasione per fare un'opportuna ricognizione delle conoscenze raggiunte dagli allievi nel segmento scolare precedente.

Le attività proposte rappresentano un modo più stimolante di avvicinare argomenti irrinunciabili nel programma di aritmetica e di algebra, rispetto ad approcci tradizionali. Si tratta di applicare, già dalla prima classe, opportune prassi che poi saranno importanti per lo sviluppo cognitivo e delle competenze, anche in preparazione delle prove esterne dell'INVALSI o delle successive prove OCSE-PISA.

I nodi concettuali si riferiscono ad argomenti di base affrontati in tutte le scuole. Pensando alle difficoltà più comuni degli alunni, si sono cercate proposte alternative: è opportuno che ogni alunno possa trovare offerte diversificate che vadano incontro al suo stile di apprendimento.

NODI CONCETTUALI

- Linguaggio naturale e linguaggio matematico
- Ordine di grandezza
- Dai problemi alle espressioni e viceversa
- Approccio ai razionali, numeri sulla retta
- Stima e plausibilità di un calcolo
- Numeri primi, multipli e divisori
- Proprietà dei numeri naturali, interi, decimali, razionali

ATTIVITÀ

- Algoritmi insoliti per la moltiplicazione e per le altre operazioni (I e II classe)
- Numeri primi conosciuti e sconosciuti (I e II classe)
- I chicchi di riso (I e II classe)

- Frazioni in movimento (I e II classe)
- Quante persone in Piazza del Popolo per il concerto di Capodanno? (II classe)
- Proprietà dei numeri razionali (III classe)
- Un'eclissi di Sole (III classe)
- Parli il "matematiche"? Dal problema all'espressione e all'equazione (III classe)
- Dei viaggiatori, delle patate e... altro (III classe)
- Matrioske matematiche (III classe)

- **Algoritmi insoliti per la moltiplicazione e per le altre operazioni**

In questa attività, adatta per iniziare il lavoro sul tema *Numero*, si presentano, si applicano e si discutono algoritmi per eseguire le operazioni (in particolare, la moltiplicazione), diversi da quelli usuali. Si tratta di procedimenti di calcolo propri di tempi e culture diverse; in questo contesto si potranno anche valorizzare semplici strategie scoperte dagli alunni.

Si avrà occasione di sviluppare le abilità di calcolo mentale o scritto e di scoprire e applicare in modo significativo alcune proprietà; si potrà arrivare a comprendere meglio i procedimenti usuali, che talvolta vengono appresi in modo meccanico.

- **Numeri primi conosciuti e sconosciuti**

Con questa attività ci si propone di creare una "familiarità" con i numeri che non si possono *sgretolare* nel prodotto di numeri interi più piccoli e che si chiamano numeri *primi*. L'attività può essere introdotta quando gli alunni conoscono il significato di numero primo, l'uso elementare delle tavole, l'uso corrente di una calcolatrice tascabile, i criteri di divisibilità per 2, per 3, per 5.

Si offrono molti spunti per affrontare problemi che sviluppino la capacità di conoscere e riconoscere proprietà e caratteristiche dei numeri primi.

L'obiettivo generale è quello di dare significatività al tema dei numeri primi, che spesso è presentato soltanto con definizioni e calcoli (scomposizioni): si accenna ad applicazioni in campo sociale e scientifico, e si cerca di far apprezzare la bellezza dell'argomento attraverso la scoperta di regolarità e proprietà. Gli alunni avranno anche l'opportunità di affrontare situazioni che ancora vengono studiate dai matematici e di conoscerne altre che tutt'oggi costituiscono problemi non risolti.

- **I chicchi di riso**

L'attività, che prende lo spunto da una nota novella indiana sulla nascita del gioco degli scacchi, può essere proposta in prima o in seconda classe, a seconda che la si voglia usare come problema introduttivo per lo studio delle potenze, oppure come lavoro di consolidamento.

Con questa attività ci si propone di leggere e scrivere numeri naturali e decimali in base 10 usando la notazione esponenziale, di individuare regolarità, di fornire esempi concreti che diano l'idea della crescita esponenziale, di produrre congetture relative all'interpretazione e alla spiegazione di osservazioni effettuate in diversi contesti.

Si vuole evitare che le potenze di numeri naturali, per esempio di 2 o di 10, e in generale i numeri molto grandi, compaiano nella pratica didattica solo in una serie di tecniche puramente operative, spesso prive di un reale significato per i nostri alunni.

- **Frazioni in movimento**

Nella prima infanzia si instaura un modello primitivo di numero, che si identifica con il numero naturale. Successivamente la concezione di numero richiede una serie di adattamenti. In tale processo di adattamento rientra la capacità di riconoscere scritture diverse che indicano uno stesso numero: si tratta di una situazione nuova rispetto a quanto si presentava nel modello primitivo dei numeri naturali. Il passaggio dall'insieme dei numeri naturali a quello dei razionali non è un semplice ampliamento, ma richiede una vera "riconcettualizzazione". Per gli alunni è difficile comprendere che scritture diverse (come 0,25; 25/100; 1/4; ...) corrispondono ad un solo concetto matematico.

In questa attività, che si può svolgere in prima classe, si propone la costruzione di uno strumento concreto che consente di mettere in evidenza aspetti, significati e scritture diverse di un numero razionale. Con l'uso della retta numerica e di altri strumenti di rappresentazione si favorisce l'apprendimento di un concetto complesso.

- **Quante persone in Piazza del Popolo per il concerto di Capodanno?**

L'attività, pensata per il secondo anno della scuola secondaria di primo grado, si collega bene con la trattazione delle aree di figure piane non regolari. Nella fase iniziale si chiede di stimare un numero grande di persone; per farlo è opportuno considerare l'area del luogo dove esse sono raccolte. Spesso stime di questo genere vengono fatte con risultati diversi e ciò può stimolare l'interesse degli alunni a cercare strategie di soluzione e ap-

prossimazione. L'attività consente di riflettere sulla misura e sull'approssimazione che è insita in ogni processo di misura.

Si cerca di sviluppare la capacità di stima in situazioni concrete che coinvolgono le tre dimensioni dello spazio e diverse unità di misura. Con appropriati esempi concreti, si indaga sui legami tra unità di misura e sugli ordini di grandezza.

Prendendo spunto dalla presenza di alunni provenienti da Paesi diversi, si può indagare anche sulla variazione di sistemi di misura nello spazio e nel tempo.

- **Proprietà dei numeri razionali**

Il concetto di numero razionale costituisce uno dei nodi cruciali nell'apprendimento della matematica nella scuola secondaria di primo grado. È importante che le attività per lo sviluppo di tale concetto siano ricche e che si avvalgano di strumenti di tipo diverso.

In questo caso, partendo da una costruzione geometrica conosciuta come il "metodo del falegname", si insiste sulla sistemazione dei razionali sulla retta, per aiutare gli studenti a formarsi l'idea della densità dei razionali. È facile e spontaneo il collegamento con la geometria, anche perché nella costruzione si applica il teorema di Talete.

Nella seconda parte dell'attività si vuole iniziare con gli alunni un percorso "razionale", presentando alcune tracce di dimostrazione di proprietà elementari dei numeri razionali. Si avviano gli alunni all'uso di una semplice simbolizzazione algebrica e alla concatenazione di considerazioni logiche.

- **Un'eclissi di Sole**

Ci sono varie situazioni in cui ci capita di avere a che fare con numeri molto grandi o molto piccoli: ad esempio, leggiamo sul giornale che la produzione di rifiuti in Italia è di 10^8 tonnellate all'anno, che il PIL (Prodotto Interno Lordo) in Italia è stato per l'anno 2000 di € $9,21 \cdot 10^{14}$, che il diametro di un globulo rosso del sangue è di $7 \cdot 10^{-3}$ mm. Sono tutte situazioni in cui usciamo dall'esperienza sensibile diretta; per coglierne a pieno il significato, occorre ricostruire apposite immagini mentali che si basano, per confronto proporzionale, su qualcosa di tangibile. L'attività è proponibile nel terzo anno, anche in corrispondenza di lavori realizzati per scienze: è molto interessante, sul piano didattico, collegare la matematica con l'astronomia, per evitare che quest'ultima si riduca all'osservazione di immagini più o meno comprensibili per i nostri alunni. Si lavora sull'ordine di grandezza, sull'approssimazione, sull'uso consapevole degli strumenti di calcolo. Il proposito generale consiste nella so-

luzione di “problemi veri” e nella costruzione di modelli di un fenomeno, l’eclissi appunto, che solitamente suscita interesse e curiosità.

- **Parli il “matematico”? Dal problema all’espressione e all’equazione**

Curando il passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio matematico si fa cogliere la necessità di un linguaggio progressivamente formalizzato, curando al contempo l’uso del linguaggio naturale. Come è giustamente sottolineato nel D.M. n. 68 del 2007, quando si risolvono problemi è bene chiedere di “spiegare anche in forma scritta il procedimento seguito, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati”.

Questa attività è pensata per la terza classe, ma alcune parti possono essere anticipate in classi precedenti se appunto si vuole porre attenzione al passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio matematico. L’uso di un linguaggio progressivamente formalizzato è uno dei traguardi da raggiungere: qui si propone una strada graduale, che parte dal linguaggio naturale e valorizza l’espressione verbale degli alunni. Dal problema espresso a parole si arriva alla sua traduzione in termini di espressioni numeriche e letterali e alla successiva risoluzione (modellizzazione matematica). Si mette anche in evidenza come un’espressione algebrica permetta di generalizzare un problema.

- **Dei viaggiatori, delle patate e... altro**

L’attività coinvolge il concetto di frazione. La capacità di operare con numeri razionali rappresenta uno dei nodi cruciali nell’acquisizione delle competenze aritmetiche, soprattutto quando il calcolo proviene da un problema. Indagini sugli errori più ricorrenti e radicati mettono in evidenza l’opportunità di rivisitare nell’ultimo anno del triennio alcuni concetti chiave sui numeri razionali; la teoria è per sua natura complessa, anche per la molteplicità delle rappresentazioni, dei contesti e dei significati. Nell’attività si riprendono svariate strategie che l’alunno ha sicuramente incontrato nel corso del triennio e che ora deve dominare in modo più sicuro e consapevole, adoperandole naturalmente nel passaggio dall’aritmetica all’algebra.

L’attività può essere collocata in vari momenti del percorso, ma è opportuno svilupparla nella terza classe, al fine di consolidare e rafforzare il concetto e l’operatività con le frazioni anche in contesti non convenzionali.

- **Matroske matematiche**

L’attività è pensata per il terzo anno della scuola secondaria di primo grado: gli alunni hanno già avuto esperienze

con i numeri naturali, quindi con gli interi e poi, lavorando con le frazioni e i razionali, hanno visto che esistono numeri decimali periodici, e forse hanno anche imparato a trovare la frazione che genera un certo numero periodico. È giunto il momento di ripensare agli insiemi numerici per capire come sono annidati fra loro e come possono essere rappresentati. Con questa attività, oltre a dare una rappresentazione in termini di teoria degli insiemi, vogliamo aiutare i ragazzi a riflettere su alcuni degli errori più comuni che si incontrano nel calcolo; soprattutto, vogliamo passare il messaggio che gli insiemi numerici via via si estendono per consentire operazioni che altrimenti risultano impossibili.

L'estensione degli insiemi numerici viene motivata sia dall'impossibilità di eseguire operazioni in certi casi, sia dalla risoluzione di semplici equazioni che ammettono soluzione in un insieme e non in un altro. Nell'attività sono anche presentati esempi in cui la ragionevolezza del risultato richiede una soluzione intera, anche se il calcolo algebrico fornisce una soluzione decimale.

Scuola secondaria di secondo grado - primo biennio

NODI CONCETTUALI E ATTIVITÀ

I numeri offrono la base per la costruzione del significato dei simboli algebrici e delle operazioni fra di essi: per manipolare con sicurezza formule algebriche è necessario comprendere profondamente le operazioni fra numeri e le loro proprietà; allo stesso tempo è indispensabile il ritorno dalla formula al numero per dare significato ai simboli.

Le attività proposte sono volte a toccare alcuni nodi concettuali fondamentali, che costituiscono parte essenziale del percorso e che possono essere affrontati a diversi livelli di approfondimento.

NODI CONCETTUALI

- Numeri primi, multipli e divisori
- Rappresentazioni diverse ed equivalenti di numeri razionali
- Ordine di grandezza, precisione e approssimazione
- Concettualizzazione dei numeri reali

- Ordinamento e densità
- Linguaggio naturale e linguaggio algebrico
- Linguaggio matematico e ragionamento
- Significato delle espressioni algebriche e del loro calcolo

ATTIVITÀ (I e II classe)

- Dalla frazione al numero decimale: esploriamo
- Il livello del mare
- Il foglio A4
- Numeri sulla retta
- Quel che vedo è sempre vero
- Eredità e bagagli: dal linguaggio naturale al linguaggio dell'algebra
- L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica
- Clessidre e bastoncini
- Numeri primi e poligoni stellati
- Attento a come parli!

- **Dalla frazione al numero decimale: esploriamo**

All'inizio del percorso di matematica è opportuno verificare e consolidare il possesso, da parte degli allievi, delle necessarie abilità di calcolo con i numeri (naturali, razionali, relativi). L'attività presentata si colloca in questo percorso, che precede l'avvio al calcolo algebrico, ed ha come obiettivo il saper riconoscere e usare correttamente diverse rappresentazioni dei numeri razionali.

L'attività è un lavoro guidato, che porta a rispondere alle seguenti domande:

1. Come si trasforma una frazione in numero decimale?
2. Data una frazione ridotta ai minimi termini, sotto quali condizioni la frazione ha una rappresentazione decimale limitata?
3. C'è una relazione tra il denominatore di una frazione ridotta ai minimi termini e il numero delle cifre dopo la virgola nella sua rappresentazione decimale, nel caso questa sia limitata?
4. Quando una frazione, ridotta ai minimi termini, ha al denominatore un fattore diverso da 2 e da 5, che

cosa si può dire della sua rappresentazione decimale?

5. Data una frazione ridotta ai minimi termini, quante sono le cifre della sua rappresentazione decimale?

- **Il livello del mare**

L'attività affronta i problemi legati alle stime degli ordini di grandezza. In effetti, saper stimare correttamente un ordine di grandezza, o saper approssimare dei valori, rappresenta una difficoltà diffusa. Proponendo problemi anche legati a situazioni reali, si capisce che in certi casi è importante l'ordine di grandezza, mentre il numero di cifre significative diventa secondario.

All'inizio dell'attività si introduce la notazione scientifica per rappresentare i numeri e si discute l'uso di questa scrittura per valutare l'ordine di grandezza. Si tratta di strumenti fondamentali per un cittadino, perché spesso arrivano dai mass media informazioni che vengono accolte con scarsa capacità di analisi e senza un adeguato "senso dei numeri".

Analizzando e ragionando su un importante tema d'attualità (di quanto si innalzerebbe il livello dei mari se tutti i ghiacciai si sciogliessero?), si affrontano in un caso concreto le diverse problematiche inerenti l'ordine di grandezza, la precisione, l'approssimazione.

- **Il foglio A4**

I nodi concettuali *rappresentazioni diverse ed equivalenti di numeri razionali, concettualizzazione dei numeri reali, ordinamento e densità*, si riferiscono alla necessità che "a livello di ciclo secondario gli studenti, che negli anni precedenti hanno acquisito una buona comprensione dei numeri interi ed hanno una conoscenza generale dei numeri razionali e delle loro proprietà, inizino a lavorare con i numeri irrazionali, per arrivare poi alla conoscenza (a livello intuitivo) dei numeri reali e, contemporaneamente, alla comprensione del completamento della retta numerica" ("Matematica 2003", Introduzione al nucleo Numeri e algoritmi).

Questa attività propone una prima costruzione dei numeri reali, che sarà poi approfondita con l'attività "Numeri sulla retta".

Perché quando si fotocopio un foglio A4 lo si può ingrandire esattamente su un foglio A3? E che c'entra questo con la matematica?

A partire da queste domande si sviluppa un percorso che mostra la necessità di uscire dal mondo dei numeri razionali, e costruirne di nuovi: i numeri irrazionali. Il percorso prosegue mostrando come sia possibile rappre-

sentare mediante allineamenti decimali un qualsiasi numero reale, e come si possano eseguire calcoli tra questi. L'attività integra aspetti di problem solving, di dimostrazione, di invenzione, di discussione matematica.

- **Numeri sulla retta**

L'attività può essere vista come un completamento di quella intitolata "Il foglio A4". Si propone una sistemazione dei concetti relativi all'ordine e alla densità degli insiemi numerici, e alla compatibilità delle operazioni, in particolare della moltiplicazione, rispetto all'ordine.

Le proposte di laboratorio ruotano attorno alla rappresentazione dei numeri sulla retta, a partire dai razionali, per estendersi poi ad alcuni numeri irrazionali (le radici quadrate di naturali) ed infine ai reali.

Un percorso guidato mira a superare le difficoltà degli alunni nel corretto confronto fra frazioni e numeri decimali. Si esaminano situazioni che sono spesso causa di errori, come il confronto tra numeri decimali con un numero diverso di cifre decimali (ad es. 3,2 e 3,12), e la moltiplicazione tra numeri minori di 1 (in cui il prodotto è minore dei fattori).

- **Quel che vedo è sempre vero**

La differenza tra il quadrato di un numero naturale e il quadrato del suo precedente è sempre un numero dispari?

Questa domanda guida l'attività proposta. L'obiettivo è di far cogliere agli alunni l'importanza di quel "sempre": come è possibile raggiungere la certezza se i casi di cui si parla sono infiniti?

Nello sviluppo dell'attività entrano in gioco due punti cruciali dell'apprendimento:

1. la formalizzazione (saper esprimere con lettere relazioni enunciate a parole);
2. la differenza tra verifica in un numero finito di casi e dimostrazione in generale.

L'attività quindi permette agli studenti di affinare le capacità critiche nell'ambito del ragionamento matematico, di consolidare le regole per il calcolo del valore di un'espressione letterale e, inoltre, di acquisire consapevolezza nell'uso degli strumenti di calcolo.

È idonea ad inizio del biennio.

- **Eredità e bagagli: dal linguaggio naturale al linguaggio dell'algebra**

A ogni livello scolastico il risolvere problemi offre occasioni importanti per costruire nuovi concetti e abilità, e per arricchire di significati concetti già appresi. Qui si propongono due problemi, il primo semplice e il secondo

più complesso, per un'attività centrata sulla traduzione dal linguaggio naturale, in cui sono formulati i problemi, al linguaggio algebrico, che ne permette la soluzione.

Il contesto scelto è linguistico: il fulcro dell'attenzione didattica si sposta così dagli algoritmi risolutivi di equazioni e sistemi alla traduzione e messa in formula dei problemi. È in questo passaggio, infatti, che si concentrano le maggiori difficoltà degli studenti, come rilevato anche dalle prove internazionali.

Insistendo troppo sulla sola risoluzione di equazioni e sistemi, slegati da un contesto problematico, si rischia di far percepire la matematica solo come strumento operativo. Occorre, invece, presentarla anche come strumento di pensiero, mettendone in luce gli aspetti concettuali: in altre parole, la matematica va presentata come palestra di ragionamento e non come collezione di ricette di calcolo.

- **L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica**

Giochi di “magia matematica” e sfide di capacità di calcolo mentale sono il cuore di questa attività in cui si affronta il nodo concettuale *linguaggio naturale e linguaggio algebrico*. Ci riferiamo all'introduzione delle regole del calcolo algebrico e alle difficoltà che lo studente incontra quando deve tradurre algebricamente (“mettere in formula”) un problema. In concreto, si tratta di dare significato al calcolo algebrico, evitando che i nostri alunni interpretino le formule algebriche come pure sequenze di segni. Si propongono così situazioni problematiche in cui il linguaggio dell'algebra supera quello dell'aritmetica e diventa strumento per esprimere relazioni e generalizzare: un linguaggio utile sia per comprendere sia per dimostrare.

Scopo principale dell'attività è allora giungere alle regole di calcolo comprendendone il significato e di usare il calcolo algebrico per risolvere problemi. Si tratta anche di cercare di presentare la matematica come strumento di pensiero, mettendone in luce gli aspetti concettuali.

- **Clessidre e bastoncini**

L'attività è proponibile ad una seconda classe che abbia già affrontato le equazioni di primo grado in una e in due incognite. L'attività ha l'obiettivo di illustrare alcune applicazioni del MCD fra interi in contesti “non convenzionali”. Spesso il MCD viene proposto nelle classi prime in una breve parentesi, con l'unico scopo di ripassare la divisibilità numerica in vista del calcolo algebrico.

Al termine del primo anno, e senz'altro nel corso della seconda classe, gli studenti possiedono i prerequisiti necessari per applicare il MCD in problemi tratti dal quotidiano, che coinvolgono semplici attività di confronto e

misura. Partendo da domande come “è possibile determinare un intervallo di tempo di 13 minuti per mezzo di due clessidre, una da 6 e una da 11 minuti?”, si scoprono e si analizzano interessanti caratteristiche legate alla divisibilità. Contestualmente, si affrontano punti nodali dell’insegnamento del primo biennio, come le capacità di “mettere in formula” e di individuare le relazioni che intercorrono fra due variabili. Per questa via, utilizzando clessidre e righelli, si riesce a rispondere in modo costruttivo ed efficace ai vari problemi proposti.

- **Numeri primi e poligoni stellati**

All’inizio del percorso di matematica il consolidamento delle conoscenze sui numeri naturali e sui numeri interi si presenta talvolta faticoso, perché gli studenti hanno la sensazione di “sapere già tutto” dei numeri. Da qui la necessità di un approccio che presenti aspetti nuovi e matematicamente pregnanti.

In questa attività sono esaminate alcune proprietà dei numeri naturali ed interi, legate in particolare ai concetti di primalità e di divisibilità. Si tratta di concetti fondamentali, che sono alla base di innumerevoli applicazioni in diversi campi delle attività umane, dall’arte all’informatica.

Si parte dal campo artistico (i mosaici dell’*Alhambra*) e si conclude con la crittografia, attraverso metodi di codifica e decodifica “storici”. Il filo che collega il tutto sta nei concetti di primalità e divisibilità, gestiti tramite le congruenze. Si arriva anche alla giustificazione dei criteri di divisibilità, portando gli alunni a semplici ma importanti dimostrazioni in teoria dei numeri.

Questa unità può essere svolta anche solo in parte, limitandosi a uno solo degli argomenti trattati, oppure presentando i diversi argomenti in momenti diversi.

- **Attento a come parli!**

La logica, sempre presente nelle attività di insegnamento, non necessariamente deve comparire nella sua veste formale e come argomento a sé stante. Tuttavia, ci sono aspetti che è opportuno portare esplicitamente all’attenzione e alla discussione degli studenti.

Questa attività offre un breve percorso su alcuni di tali aspetti.

Così si prendono in esame molteplici contesti per affrontare i quantificatori (espliciti ed impliciti, che spesso pongono problemi di interpretazione), la negazione di frasi quantificate e non, le implicazioni nelle loro diverse formulazioni e, in genere, forme equivalenti di espressioni nel linguaggio comune e nel linguaggio matematico. La proposta, che non vuole essere esaustiva, può essere utilizzata nel periodo del biennio che l’insegnante ritiene più opportuno.

2. Geometria

La geometria si pone da una parte come ambiente per costruire pensiero teorico, indirizzato all'argomentazione e alla dimostrazione, dall'altra come contesto per affrontare e porsi problemi significativi, per esplorare e percepire affascinanti relazioni in natura e nell'opera dell'uomo, per avviare alla modellizzazione.

Le attività presentate sono particolarmente adatte per permettere agli allievi non solo di eseguire, ma anche di progettare, costruire e manipolare con materiali diversi, discutere, argomentare, fare ipotesi, sperimentare e controllare la validità delle ipotesi fatte. L'idea che ispira ciascuna attività è quella di far seguire le definizioni, i concetti, le dimostrazioni alla risoluzione delle situazioni problematiche. È quindi determinante l'equilibrio tra le fasi operative e le graduali sistemazioni teoriche, in modo da favorire nei ragazzi il passaggio da evidenze visive ad argomentazioni sempre più rigorose. Per tale ragione, l'approccio tradizionale alla geometria basato su calcoli di lunghezze, angoli, perimetri, aree, ecc. in contesti poco significativi e artificiosi (pensiamo al contadino che ha un campo a forma di trapezio isoscele) viene evitato a favore di situazioni ricche e motivanti, in cui l'alunno si possa formare basi intuitive, stimolando nella produzione di immagini mentali e nella visualizzazione di figure, una comprensione delle proprietà geometriche fondata sulla capacità di astrazione e correlazione.

Si vuole costruire una geometria che sia efficace strumento di modellizzazione della realtà, che offra frequenti occasioni di richiesta di argomentazioni, che dia ampio spazio all'intuizione, senza peraltro lasciarsi guidare da essa a troppo facili conclusioni. L'abitudine a una visione dinamica (insieme a quella statica) degli oggetti geometrici fornisce maggiori strumenti di esplorazione e di formulazione di congetture, specie se supportata da un uso integrato di strumenti tradizionali e tecnologici.

Scuola secondaria di primo grado

NODI CONCETTUALI E ATTIVITÀ

La scelta dei nodi concettuali è stata guidata dalle difficoltà che hanno gli studenti, a qualunque età, e soprattutto nella scuola secondaria di secondo grado, nel riconoscere, comprendere ed applicare definizioni e proprietà della

geometria in contesti vari. Per esempio, sono note le difficoltà che gli allievi trovano nel tracciare le altezze in un triangolo (soprattutto se il triangolo è scaleno), oppure nel tracciare la distanza tra due rette parallele o tra un punto e una retta (soprattutto se le rette non sono in posizioni standard come orizzontale o verticale). Queste difficoltà sono spesso dovute al prevalere di stereotipi nelle spiegazioni e nei libri di testo, oppure alla mancata comprensione di definizioni, seppure ricordate e recitate a memoria. Pensiamo, per esempio, all'angolo e alle difficoltà a concepirlo come infinito e determinato da due semirette con la stessa origine, non solamente da un archetto disegnato in prossimità del vertice. E pensiamo alla difficoltà nel riconoscere regolarità e simmetrie (per esempio per quanto riguarda il parallelogrammo i fraintendimenti sono spesso presenti). Al fine di costruire il più presto possibile significati corretti e stabili, le attività scelte mettono in luce questi nodi concettuali fin dalla scuola secondaria di primo grado.

Le attività per la geometria nella scuola secondaria di primo grado sono volte a toccare alcuni nodi concettuali fondamentali, che costituiscono parte essenziale del percorso di geometria e che possono essere affrontati a diversi livelli di approfondimento.

NODI CONCETTUALI

- Distanza punto/retta; altezze; perpendicolarità
- Angoli: confronto, operazioni e misura
- Simmetria spaziale e numeri interi relativi: piano cartesiano
- Poligoni, costruzioni geometriche, congetture, argomentazioni
- Regolarità nel mondo reale, traslazioni e simmetrie
- Definizione, classificazione dei quadrilateri
- Rapporti tra grandezze, proporzionalità diretta, modellizzazione
- Similitudine: congruenza degli angoli, proporzionalità dei lati
- Cerchio: diametro, circonferenza, area
- Rappresentazione mentale e grafica di solidi, loro proprietà

ATTIVITÀ

- L'albero maestro (I classe)
- L'orologio (I classe)

- Regina reginella (I classe)
- Costruire poligoni (I e II classe)
- Regolarità e simmetria (I classe)
- Definire i quadrilateri con le simmetrie (I e II classe)
- La foto (III classe)
- La città misteriosa (II e III classe)
- Misurare il cerchio (II e III classe)
- Solidi noti e solidi misteriosi (III classe)

- **L'albero maestro**

L'attività si riferisce al nodo concettuale della *distanza tra un punto e una retta*, che è causa di molti misconcetti tra gli allievi, spesso legati a situazioni stereotipe di rette e segmenti orizzontali o verticali. Insieme alla questione della distanza punto/retta, si affrontano gli altri nodi concettuali ad essa legati, come la perpendicolarità e le altezze di un triangolo, in situazioni non stereotipe, come quando non ci sono lati orizzontali o verticali, o quando il triangolo è ottusangolo e l'altezza cade fuori dal lato opposto. Ci si aspetta quindi che gli allievi, alla fine di questa attività, siano capaci di tracciare correttamente le altezze in un triangolo (ma anche in un parallelogrammo e in un trapezio), conoscendo il significato di distanza punto/retta, di perpendicolare e di altezza.

- **L'orologio**

L'attività si riferisce al nodo concettuale degli *angoli* in relazione all'uso dell'orologio analogico e del passare del tempo segnato dalle lancette, con costruzione del significato di angolo e di arco, loro distinzione e applicazioni in situazioni di confronto, misura, operazioni. Partendo da una situazione problematica legata all'orologio e allargandola alla costruzione di un orologio di grandi dimensioni, si vuole che gli allievi ottengano angoli piccoli (ad es. di un grado), su circonferenze di raggi diversi, in modo da associare l'angolo allo spazio tra le due semirette e non semplicemente all'arco che si usa per indicarlo. Questa esperienza ha lo scopo di evitare il fraintendimento, diffuso tra gli allievi, che l'angolo si identifichi con l'arco oppure con una regione finita di piano.

- **Regina reginella**

L'attività proposta prende spunto da un gioco diffuso: "Regina reginella" (già presente in "Matematica 2001"),

ed ha come nodo concettuale la *simmetria spaziale*, che si sviluppa da attività percettivo-motoria e coinvolge i numeri interi relativi. Questo gioco può essere realizzato all'aperto o al chiuso, in uno spazio grande, e quindi rappresentato su carta. Con la rappresentazione, mediante rette opportunamente contrassegnate, si giunge alla razionalizzazione di uno spazio lineare bidirezionale e normato, e successivamente, attraverso l'uso di percorsi a frecce, si può introdurre il *piano cartesiano* ed eventualmente la linea dei numeri interi relativi con la loro somma algebrica. L'attività, collocata in una prima classe, permette di porre basi solide a competenze di orientamento e di applicazione della simmetria spaziale.

- **Costruire poligoni**

L'attività si sviluppa attorno al nodo concettuale dei *poligoni*, tramite loro costruzioni geometriche e l'uso delle congetture e delle argomentazioni. Si snoda attraverso un itinerario adatto anche come primo approccio alla geometria del piano in una prima classe, in quanto conduce gli allievi a conoscere e definire le principali figure piane attraverso la scoperta delle loro proprietà e attraverso la loro descrizione tramite il linguaggio naturale, via via più specifico. I poligoni quindi vengono conosciuti come oggetti geometrici attraverso la scoperta delle loro proprietà, alcune delle quali servono a determinarli. Si tratta per esempio la disuguaglianza triangolare come proprietà nei triangoli, scoperta attraverso l'esplorazione e la raccolta di dati in tabelle, la somma degli angoli interni di un triangolo e di un poligono, con la possibilità di approfondire nella direzione dei criteri di uguaglianza dei triangoli o di situazioni di isoperimetria ed equiestensione.

- **Regolarità e simmetria**

L'attività si riferisce al nodo concettuale delle *trasformazioni elementari nel piano*, esplorato attraverso la ricerca di regolarità nel quotidiano e la costruzione di significati relativi a *traslazioni* e *simmetrie*. Le esplorazioni relative alle simmetrie hanno lo scopo di evitare misconcetti diffusi tra gli allievi, come quelli relativi al tracciamento di rette che, pur avendo posizioni regolari in una figura (ad es. le diagonali in un parallelogrammo), in realtà non costituiscono assi di simmetria per la stessa. Le simmetrie possono anche essere utilizzate per disegnare figure geometriche, una volta costruiti adeguatamente i loro significati.

- **Definire quadrilateri con le simmetrie**

Lo scopo di questa attività è quello di condurre i ragazzi alla costruzione dei quadrilateri convessi e alla scoperta

di una loro classificazione, utilizzando come criterio gli elementi di simmetria che possiedono. L'intento definitorio quindi non viene realizzato tramite assunzioni statiche da acquisire a memoria, ma in modo costruttivo, tramite attività di scoperta con l'uso delle simmetrie. Tale metodologia conduce alla classificazione dei quadrilateri per inclusione e all'intuizione della classificazione euclidea per partizione. L'uso del linguaggio in modo attivo da parte dei ragazzi supporta la costruzione della classificazione, guidata da opportune schede che favoriscono l'esplorazione e la congettura. L'utilizzo di un modello che offre l'ambiente in cui effettuare le esplorazioni è particolarmente efficace per la formulazione delle congetture su quadrilateri con uno o più assi di simmetria e sulle relazioni tra essi in termini inclusivi.

- **La foto**

L'attività si riferisce al nodo concettuale della *proporzionalità diretta* applicato in contesto di figure simili, anche se non si tratta il tema della similitudine in modo tradizionale. Infatti, a partire da una situazione problematica che chiede la statura di un bambino rappresentato in foto, si sviluppa il nodo della proporzionalità con la *modellizzazione*, i rapporti tra grandezze e, infine, la similitudine. Per essere risolta, infatti, tale situazione problematica necessita del riconoscimento della proporzionalità tra le grandezze reali (altezza di un bambino e altezza di un guard-rail) e le corrispondenti grandezze rappresentate in una fotografia (sullo stesso piano verticale). Particolarmente utile nell'attività è la discussione guidata dall'insegnante, che ha il fine di socializzare le varie proposte di soluzione degli studenti, per scegliere quella adeguata allo scopo. Tra le proposte non mancheranno modelli di crescita di bambini proporzionali col tempo o modelli additivi, che andranno scartati dopo opportuni controesempi.

- **La città misteriosa**

L'attività costituisce un proseguimento di quella intitolata "La foto" di "Matematica 2001". Là si affrontavano i concetti di grandezze direttamente proporzionali, qui si affrontano le *similitudini* come relazioni tra figure che hanno la stessa forma. L'allievo è guidato a costruire le conoscenze fondamentali relative alle figure simili a partire dai triangoli. Tali conoscenze riguardano due nodi concettuali: la *congruenza degli angoli* e la *proporzionalità dei lati*, legati entrambi al nodo della *similitudine*. Si vuole evidenziare la diversità che esiste fra i triangoli e gli altri poligoni: nei triangoli una delle due relazioni (uguaglianza degli angoli, proporzionalità dei lati) "si tira dietro l'altra", cosa che non succede negli altri poligoni.

L'attività è divisa in tre fasi: nella prima si deve collocare la posizione di una città su una carta geografica a scala maggiore di un'altra, in cui è nota la posizione della stessa città; nella seconda si affronta la proporzionalità delle lunghezze dei lati a partire dalla osservazione di figure ingrandite, rimpicciolite o deformate; nella terza si generalizzano i risultati trovati, utilizzando dei modellini concreti.

- **Misurare il cerchio**

L'attività affronta il nodo concettuale del *cerchio*, una delle figure piane più complesse per i nostri allievi, che spesso, pur sapendone calcolare l'area e la misura della circonferenza tramite le formule, ne hanno una conoscenza superficiale e confusa. A partire dal problema di trovare il centro del cerchio data la circonferenza, l'attività si snoda su problematiche in cui gli allievi sono coinvolti nel prospettare e verificare ipotesi di soluzione con varie modalità, anche grafiche e operative. Così facendo, si recuperano le costruzioni con riga e compasso, che spesso nella scuola italiana sono confinate nel programma di educazione tecnica, dando loro il significato geometrico che meritano da un punto di vista storico e teorico. Si guidano inoltre gli allievi nella ricerca del legame fra il *diametro* e la *circonferenza* e dell'*area* del cerchio a diversi livelli di difficoltà: tramite manipolazione, modellizzazione e costruzioni con software di geometria dinamica. In tal modo si lavora su competenze varie: dalla costruzione di figure geometriche tramite strumenti, alla ricerca di definizioni e proprietà di figure piane, fino alla conquista del numero π e delle sue approssimazioni.

- **Solidi noti e solidi misteriosi**

L'attività stimola nei ragazzi la visione spaziale e si basa sullo sviluppo del nodo concettuale dei *solidi* (già noti o sconosciuti), tramite loro rappresentazioni fisiche, grafiche, mentali. Punta, quindi, allo sviluppo della visione tridimensionale che anche nei livelli scolari successivi vede spesso il sorgere di difficoltà negli studenti. L'attività si sviluppa in modo laboratoriale, favorendo un apprendimento percettivo-motorio prima che simbolico. Si basa sulla costruzione, identificazione e scoperta di alcuni solidi, connessa con la descrizione delle loro proprietà geometriche, in un percorso che, partendo da evidenze visive o da ragionamenti su oggetti non fisicamente presenti, arriva ad argomentazioni e concettualizzazioni sempre più rigorose. Fanno parte del percorso la costruzione di un tetraedro, la soluzione di una situazione problematica in cui sono coinvolte piramidi, lo studio di come sono fatti questi solidi. Come in altre attività, è fondamentale il ruolo dell'insegnante nella gestione della discussione matematica.

NODI CONCETTUALI E ATTIVITÀ

Le attività di geometria per il biennio della scuola secondaria di secondo grado si pongono in continuità con le analoghe proposte per la scuola secondaria di primo grado, con l'obiettivo di condurre progressivamente lo studente dall'intuizione e dalla scoperta di proprietà geometriche alla loro rappresentazione razionale, in contesto di geometria sintetica e di geometria analitica, verso le attività di modellizzazione, legate al nucleo delle Relazioni. Anch'esse puntano a toccare nodi concettuali di fondamentale importanza per la costruzione di significati matematici, come la modalità di variazione delle grandezze geometriche (lineare o più complessa di quella lineare, come quadratica o esponenziale) e il modo di rappresentare tale variazione in grafici e tabelle attraverso lo studio di variazioni finite, incrementi e pendenza. In tal modo si punta ad integrare il più possibile i diversi modi di rappresentazione degli oggetti matematici (numerico, grafico, simbolico) e di far raggiungere agli allievi competenze per il cittadino utili a interpretare il mondo circostante e non solo gli enti matematici.

NODI CONCETTUALI

- Passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio geometrico: forme geometriche e simmetrie
- Assiomatica: verifica empirica e validazione teorica
- Isometrie per comprendere situazioni e risolvere problemi
- Teorema di Pitagora: equivalenza ed equiscomponibilità
- Visione spaziale, proprietà di oggetti tridimensionali e loro rappresentazione su un piano
- Modellizzazione di situazioni nel piano cartesiano; rapporti tra grandezze, pendenza
- Variazione di grandezze geometriche e relazioni tra di esse: funzioni
- Similitudini e teorema di Talete; modelli proporzionali e additivi
- Misure dirette di aree tramite approssimazioni; misure indirette tramite formule
- Tassellazioni: equiscomponibilità, equivalenza, isoperimetria di figure e relazioni algebriche

ATTIVITÀ (I e II classe)

- Ville e palazzi: forme geometriche e simmetrie
- Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione

- Problemi di minimo nel piano
- Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia
- Simmetrie nei poliedri
- Studenti in movimento
- Ognuno cresce a modo suo
- Ombre e proporzionalità
- Superfici comode e scomode
- Tangram e tassellazioni

- **Ville e palazzi: forme geometriche e simmetrie**

L'attività si colloca in continuità con lo studio delle simmetrie nella scuola secondaria di primo grado, approfondendo il tema anche in relazione alle costruzioni architettoniche che in Italia ci offrono esempi culturali significativi. Essa si riferisce al nodo concettuale del *passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio geometrico*, in quanto non pretende di sistematizzare tutte le conoscenze relative alle simmetrie, ma di introdurre un discorso intorno ad esse, a partire dalle conoscenze pregresse degli allievi e in un contesto problematico contestualizzato nella realtà circostante. Gli allievi si devono cimentare quindi nel riconoscimento di figure geometriche, di loro invarianti e simmetrie, provando a descrivere tali figure con terminologia che via via si fa più specifica.

- **Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione**

L'attività si colloca all'interno di un percorso che ha come obiettivo primario l'introduzione alla dimostrazione, guidando gli studenti al nodo concettuale dell'*assiomatica*, che si basa su premesse accettate, definizioni e proprietà da dimostrare. Dando per noti i concetti di perpendicolare e bisettrice, lo studente affronta una situazione problematica sulla relazione tra bisettrice e altezza di un triangolo isoscele, con l'uso di un software di geometria dinamica. Per avviare una riflessione collettiva sulla differenza tra le forme spontanee di argomentazione e le modalità specifiche di una argomentazione matematica, è cruciale il ruolo dell'insegnante nella discussione matematica.

- **Problemi di minimo nel piano**

L'attività si riferisce al nodo concettuale delle *isometrie* (simmetrie assiali), per comprendere situazioni e risolvere problemi, sviluppato in contesto geometrico che tocca proprietà del triangolo come la disuguaglianza triangolo-

lare. Si propone di modellizzare il fenomeno della formazione delle immagini in uno specchio piano, attraverso l'uso di strumenti e strategie diversi. Si invitano gli studenti a esplorare le situazioni geometriche, procedendo dall'intuizione alla scoperta di proprietà. Nella fase iniziale si conducono gli studenti a riflettere sul significato di valore minimo; nella fase esplorativa e di modellizzazione sono usati non solo strumenti classici, come riga e goniometro, ma anche vario materiale povero e software di geometria, allo scopo di aiutare gli studenti a giustificare le congetture formulate.

- **Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia**

L'attività si inserisce nel contesto della geometria euclidea piana, prevede che siano già possedute le nozioni di equiscomponibilità ed equivalenza fra poligoni e propone alcune dimostrazioni del teorema di Pitagora. Si prende spunto dalla lettura di un racconto per risvegliare l'interesse nei confronti del teorema, che può essere già noto agli allievi, riportando successivamente esempi di dimostrazioni. Il nodo concettuale dell'attività ruota attorno al teorema di Pitagora, con riferimento all'*equivalenza* e all'*equiscomponibilità* di figure piane, sviluppate attraverso congetture, argomentazioni, verifiche e dimostrazioni. Il percorso è realizzato anche mediante l'ausilio di software di geometria dinamica ed è arricchito con animazioni in cui sono visualizzate le dimostrazioni proposte. Si fa riferimento anche al modo di costruire gli angoli retti da parte degli egizi, motivando così la parte applicativa e quella teorica del nodo concettuale.

- **Simmetrie nei poliedri**

L'attività si riferisce al nodo concettuale della *visione spaziale* con riferimento alle *proprietà di oggetti tridimensionali* e della loro *rappresentazione sul piano*. Si indaga, con un approccio intuitivo, su come estendere le proprietà di simmetria dei poligoni ai poliedri, fino ad arrivare ai concetti di piano di simmetria, di centro di simmetria, di asse di simmetria e di asse di rotazione. Il percorso è caratterizzato dalla manipolazione di modelli fisici di poliedri, visualizzati anche con software didattico in 3 dimensioni. Procedo dallo sviluppo piano degli stessi e dall'esplorazione mediante l'uso di specchi e tende a far acquisire agli studenti una descrizione corretta e condivisa di poliedri regolari e delle loro simmetrie.

- **Studenti in movimento**

L'attività si riferisce al nodo concettuale della *modellizzazione di situazioni nel piano cartesiano*, sviluppato tra-

mite attività di moto, in cui si rilevano i dati di posizione e tempo in situazioni diverse. Tale campo di esperienza è particolarmente ricco se esplorato mediante la tecnologia di sensori di moto collegati con computer o calcolatrici e offre la possibilità agli studenti di costruire significati relativi non solo alla legge oraria e alla traiettoria (con le relative corrispondenze e diversità), ma anche significati di pendenza e variazione di pendenza, fondamentali per introdurre allo studio di funzioni che sarà affrontato negli anni successivi. In tal modo, si affronta la relazione tra grandezze – evitando il misconcetto del grafico orario come rappresentazione fisica della traiettoria – attraverso l'analisi di grafici sul concetto di pendenza, che è la radice cognitiva fondamentale per affrontare successivamente il concetto di derivata.

- **Ognuno cresce a modo suo**

L'attività si riferisce al nodo concettuale della *variazione di grandezze geometriche*, con la conseguente individuazione di relazioni tra esse, espresse tramite funzioni. La situazione problematica proposta ha lo scopo di indagare sulla variazione di tre tipi di funzioni, che sono rispettivamente lineare, quadratica ed esponenziale. La risoluzione del problema impegna gli studenti nell'esprimere tale variazione non solo in termini ricorsivi, ossia ponendo un valore in funzione del precedente, ma anche in termini di formula, espressa tramite una funzione che lega le due variabili in gioco. Lo scopo è quello di far riflettere sui diversi modi di variazione tra grandezze, che non si riduce (come spesso ingenuamente credono gli studenti) a quello lineare, ma può essere più complicato. Il confronto tra le diverse funzioni rende conto dei diversi andamenti e costringe a una riflessione sulla rappresentazione numerica, simbolica e grafica che anticipa gli studi successivi indirizzati all'analisi matematica.

- **Ombre e proporzionalità**

L'attività è centrata sul nodo concettuale delle *similitudini*, mediante l'analisi di situazioni reali, fino ad affrontare il nodo cruciale del *teorema di Talete*, unitamente alle sue conseguenze nel piano, per favorire la consapevolezza del suo ruolo fondamentale nella geometria piana. Gli allievi sono coinvolti in situazioni problematiche, in cui devono individuare relazioni significative tra grandezze di varia natura (proporzionalità diretta, ...), quindi costruire modelli a partire da dati utilizzando le principali famiglie di funzioni (lineari, ...), e distinguere tra *modelli additivi* e *modelli proporzionali*. In tal modo, essi entrano nello specifico delle similitudini, da un punto di vista teorico, analizzandone proprietà e invarianti, e collegandole alle situazioni reali ad esse riconducibili. Successivamente possono affrontare e risolvere semplici problemi in cui siano coinvolte le similitudini.

- **Superfici comode e scomode**

L'attività prende spunto da due precedenti: una sull'area di "Matematica 2001" e una sulle crescite lineari e quadratiche di aree di "Matematica 2003", per sviluppare il nodo concettuale dell'*area di figure piane*. Essa costituisce una buona occasione per ricavare direttamente l'area di superfici a partire da esperienze di misure dirette tramite approssimazioni per eccesso e per difetto, in modo da passare successivamente a misure indirette di aree di figure poligonali con l'uso di formule, procedimenti e regole tipiche della geometria.

L'attività si conclude ripercorrendo il procedimento di Archimede per determinare una approssimazione, per difetto e per eccesso, dell'area del cerchio. In tal modo viene toccato il nodo concettuale del *numero π* come rapporto tra area e quadrato del raggio, quindi il nodo di *numero reale* a partire da un'esperienza di misura. Con questo percorso, che tocca l'area del cerchio tramite procedimenti "al limite", gli allievi possono costruire il significato di numero reale basato sul risultato di una serie di approssimazioni per eccesso e per difetto, che costituisce una radice cognitiva del suo significato più teorico, di elemento di separazione di classi contigue di numeri razionali.

- **Tangram e tassellazioni**

L'attività ricorre al tangram per affrontare il nodo concettuale delle *tassellazioni* in un contesto di gioco, con lo scopo di sviluppare i nodi concettuali: dell'*equiestensione* e dell'*equivalenza di figure piane*; dell'*equiestensione* e dell'*isoperimetria di varie figure*; dell'*area* e del *perimetro di figure geometriche composte* in relazione alla lunghezza di alcuni loro elementi lineari; delle *proprietà delle similitudini* come "teoremi in atto" per risolvere le situazioni problematiche proposte; del teorema di Pitagora, applicato per ricavare relazioni tra lati di triangoli al fine di risolvere i problemi di cui ai punti precedenti. Gli allievi sono coinvolti nell'individuare e riconoscere proprietà di figure del piano, invarianti per isometrie nel piano, non solo, ma anche nell'applicare isometrie per risolvere semplici problemi, riconoscendo poligoni equiscomponibili. Le varie fasi dell'attività si legano alla controparte algebrica, in cui gli allievi sono coinvolti nel formalizzare gli oggetti della geometria elementare e nel passare da una rappresentazione all'altra in modo consapevole e motivato. Tutto ciò al fine di favorire il collegamento tra registri diversi per la rappresentazione degli stessi oggetti matematici.

Scuola secondaria di primo grado

NODI CONCETTUALI E ATTIVITÀ

I nodi concettuali sono stati scelti per mettere in risalto da una parte le nozioni irrinunciabili su cui gli studenti devono maturare sufficiente esperienza, dall'altra le criticità che gli studenti stessi generalmente incontrano e che non sempre vengono superate anche per mancanza di opportune strategie didattiche. Il riferimento alle relazioni e all'uso delle lettere mette in evidenza la particolare attenzione che deve essere prestata all'uso del linguaggio naturale prima, e a quello specifico della matematica poi, in particolare per parlare degli oggetti matematici, delle loro proprietà e delle relazioni che è possibile stabilire fra insiemi.

La proporzionalità diretta, da trattare in modo approfondito e sistematico con il linguaggio delle proporzioni, è un primo approccio all'utilizzo del linguaggio delle funzioni, che sarà poi sviluppato nella scuola secondaria di secondo grado ed è centrato sull'analisi dei dati, sull'interpretazione di situazioni concrete, sulla costruzione di ipotesi. Infine le equazioni di primo grado sono introdotte come strumenti per formalizzare problemi e per esplorare le eventuali strategie risolutive senza enfatizzare troppo l'aspetto simbolico e le tecniche meccaniche di soluzione.

NODI CONCETTUALI

- Proprietà e relazioni in vari contesti
- Uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà
- Proporzionalità diretta. Proporzionalità inversa
- Problemi ed equazioni di primo grado

ATTIVITÀ

- I miei numer-amici (I e II classe)
- Un volantino, tanti problemi (I classe)
- Diversi tra confini uguali (I e II classe)
- Il numero... di ferro (I e II classe)

- Mettiamo in equilibrio (I, II e III classe)
- Sì, ma quanto sarò alto? (II e III classe)
- Il figlio del re (I e II classe)
- Diete alimentari I (III classe)
- Il valore dei soldi (III classe)
- Le camicie di Diofanto (III classe)

- **I miei numer-amici**

L'attività si riferisce al nodo concettuale *proprietà e relazioni in vari contesti*, esplorato in maniera attiva e dinamica, attraverso l'osservazione di regolarità e relazioni che emergono da un'indagine sulla provenienza degli alunni della classe. Si parte dalla costruzione e analisi di semplici corrispondenze rappresentate con tabelle, insiemi e frecce e si arriva alla scoperta di alcune relazioni significative nei numeri naturali ("essere multiplo di", "essere divisore di", "essere maggiore di", ...) che gli alunni dovrebbero avere già incontrato negli studi precedenti, magari senza raggiungere quella consapevolezza che la maggiore età e il nuovo corso di studi potrebbero rendere possibile. L'attività permette agli alunni di acquisire esperienza su un uso più pertinente e ragionato del linguaggio naturale per parlare degli oggetti matematici, delle loro proprietà e delle relazioni che è possibile stabilire fra insiemi di oggetti.

- **Un volantino, tanti problemi**

L'attività si articola sul nodo concettuale *proprietà e relazioni in vari contesti* e si inserisce nel percorso di riconoscimento dei "problemi" nella vita di ogni giorno e porta a considerarli con attenzione come situazioni su cui riflettere assieme ai compagni. Esplorare e risolvere problemi costituisce per gli studenti un'attività fondamentale per costruire nuovi concetti e abilità, per arricchire di significati concetti già appresi e per verificare gli apprendimenti realizzati in precedenza.

Attraverso la proposta di strumenti didattici inusuali quali volantini e dépliant, gli alunni sono invitati e guidati ad analizzare vari messaggi, a individuare le relazioni tra i dati, a riflettere sul rapporto tra contesto e algoritmo di un problema. Il percorso prevede all'inizio una discussione su quesiti proposti dall'insegnante che aiutano l'alunno ad analizzare la situazione descritta nel volantino, per comprenderla nei dettagli e per procedere poi all'elaborazione di testi-problemi riferiti al contesto e, successivamente, alla proposta di volantini relativi a situazioni diverse. Il lavoro sui problemi e sulle situazioni problematiche coinvolge molte competenze, dal piano linguistico a quello

matematico cognitivo e metacognitivo. Nell'attività che proponiamo, dove si alternano problem posing e problem solving, tutte queste abilità vanno a formare un tessuto in cui si riconoscono e intrecciano in modo trasversale pensiero logico, narrativo, creativo.

- **Diversi tra confini uguali**

L'attività fa riferimento ai nodi concettuali *proprietà e relazioni in vari contesti e uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà*.

Partendo da una situazione concreta si pone e si affronta il problema: "figure che hanno lo stesso perimetro devono essere necessariamente anche equiestese?".

Il percorso porta gli alunni a scoprire relazioni tra figure piane, a consolidare i concetti di perimetro e area di un poligono e ad acquisire piena consapevolezza della diversità esistente tra le due nozioni. Infine li porta a modellizzare la famiglia dei rettangoli isoperimetrici con la relazione algebrica $x + y = k$ e con il grafico della funzione $y = k - x$. Dal punto di vista metodologico, l'attività è caratterizzata dalla problematizzazione delle situazioni, dalle fasi di manipolazione e laboratorio, dallo sviluppo della discussione in classe, dall'uso di rappresentazioni grafiche e simboliche.

- **Il numero... di ferro**

L'attività è un'esperienza di scoperta realizzata nell'ambito del laboratorio di scienze e affronta, in modo approfondito e sistematico, questioni relative al nodo concettuale *uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà della proporzionalità diretta*. L'attività riguarda lo studio delle proprietà della materia e del volume dei corpi e, oltre a costituire una prima introduzione alla geometria solida, conduce alla costruzione graduale di una tabella e del relativo grafico che sintetizza la relazione che lega il peso al volume di un corpo. L'esperimento guida gli studenti a modellizzare con il linguaggio delle proporzioni una situazione concreta di relazione di proporzionalità diretta che porta alla determinazione del peso specifico e li avvia ad utilizzare il linguaggio delle funzioni, che sarà poi sviluppato nella scuola secondaria di secondo grado, mediante una funzione del tipo $y = kx$.

- **Mettiamo in equilibrio**

È un'esperienza di scoperta realizzata nell'ambito del laboratorio di scienze e affronta in modo approfondito e sistematico questioni relative al nodo concettuale *uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e*

proprietà della proporzionalità inversa. Una competenza fondamentale che si dovrebbe acquisire attraverso lo studio della matematica è quella di costruire modelli che permettano di interpretare la realtà, cogliendo regolarità, differenze e analogie.

L'esperienza laboratoriale che proponiamo è un esempio di come guidare i ragazzi alla modellizzazione di una situazione concreta con una relazione di proporzionalità inversa e mediante una funzione del tipo $y = a/x$. L'attività prevede l'uso di una "bilancia" costituita da un'asta sospesa nel suo punto centrale e libera di oscillare in un piano verticale a cui vengono agganciati dei pesi per ricercare, analizzare e formalizzare le varie posizioni di equilibrio.

- **Sì, ma quanto sarò alto?**

L'attività, legata anche al nodo concettuale *proprietà e relazioni in vari contesti*, fornisce un esempio di come avviare al concetto di funzione, e alla lettura qualitativa di un grafico e di come consolidare la sua conoscenza intuitiva, riferendosi alla storia personale degli alunni.

Oggetto della proposta sono le curve di crescita presenti sul libretto pediatrico e l'attività si snoda attraverso la loro lettura, interpretazione ed elaborazione. L'esame della variazione nel tempo dell'altezza permette di individuare l'andamento della curva di crescita personale di ogni ragazzo e di fare su quella base alcune estrapolazioni sull'altezza futura.

L'attività si collega da una parte alla statistica, in quanto le curve di crescita sono grafici percentili, dall'altra alle scienze per quanto riguarda i fattori che influenzano la crescita (genetici, di alimentazione e salute). È possibile l'uso del web per la ricerca di documenti, in particolare per visualizzare le curve di crescita di riferimento per l'Italia e per utilizzare il software che permette la loro elaborazione.

- **Il figlio del re**

L'attività si riferisce al nodo concettuale *proprietà e relazioni in vari contesti*. La proposta è costituita da una situazione-problema che si colloca in un contesto narrativo (liberamente tratto da *I sette messaggeri* di Dino Buzzati), dove il rapporto spazio/tempo gioca un ruolo primario. Il racconto narra di principi e cavalieri, di castelli e reami, di viaggi e comunicazioni, richiamando nella mente degli alunni un mondo leggendario. Il contesto narrativo favorisce il loro coinvolgimento nella risoluzione della situazione-problema, attivando ragionamenti in cui si tengono sotto controllo due storie parallele ed interagenti. La soluzione della situazione-problema si ottiene dall'analisi di un grafico che rappresenta matematicamente la storia proposta.

- **Diete alimentari I**

L'attività si riferisce al nodo concettuale *proprietà e relazioni in vari contesti*. Prendendo spunto dall'educazione alimentare, si arriva all'elaborazione di una dieta che prevede l'apporto equilibrato dei diversi principi nutritivi. I dati, via via raccolti ed elaborati, vengono tabulati usando rappresentazioni diverse che hanno proprietà diverse e possono essere utili per differenti scopi. Pertanto, per capire le situazioni, occorre analizzare vantaggi e svantaggi delle diverse rappresentazioni e saper passare opportunamente da una all'altra. L'attività qui presentata è un esempio di come consolidare la conoscenza intuitiva del concetto di funzione e di come iniziare la sua formalizzazione, avendo cura di mantenere un forte controllo del significato dei simboli e delle rappresentazioni, in uno specifico contesto di tipo scientifico legato a temi della vita quotidiana. In particolare, vengono considerate funzioni definite su insiemi finiti e le loro rappresentazioni mediante tabelle e grafici a colonne e vengono esercitate le abilità di calcolo e di uso del foglio elettronico.

- **Il valore dei soldi**

L'esperienza propone una riflessione sul problema del cambio monetario. L'attività inizia con un "gioco-problema" da svolgere a gruppi, ispirato alla pratica del baratto. In seguito a una breve riflessione sulle difficoltà legate allo scambio di oggetti si giunge alla naturale e necessaria introduzione delle monete e del reciproco valore. Lo sviluppo del percorso didattico prende spunto da ipotesi di viaggi all'estero, in Paesi che non usano l'euro, o di visite di scambio con studenti stranieri. Si affrontano dunque vari problemi riguardanti il cambio tra valute: l'argomento dal punto di vista matematico permette un'applicazione concreta dei principi della proporzionalità e un uso molto naturale di semplici formule letterali.

Lo svolgimento di questa attività offre molti spunti didattici di natura pluridisciplinare (per esempio, permette collegamenti con la geografia, la storia, l'italiano o la lingua straniera); inoltre possono essere approfondite altre questioni, come quella del costo della vita. Molte applicazioni possono essere affrontate e sviluppate nel laboratorio d'informatica con l'utilizzo del foglio di calcolo e del web.

- **Le camicie di Diofanto**

L'attività si riferisce al nodo concettuale *problemi ed equazioni di primo grado* e conduce gli alunni a formalizzare, in equazioni del tipo $ax + by = c$, con a , b e c numeri interi, il problema di determinare quante camicie di un prezzo e quante dell'altro possono essere acquistate avendo a disposizione una determinata somma di denaro.

Si affrontano questioni delicate: la ricerca di soluzioni nell'insieme dei numeri naturali, dei numeri interi e dei numeri razionali; la determinazione del numero di soluzioni del problema; la costruzione di strategie risolutive basate su esplorazioni, l'uso strumentale di tabelle e grafici.

Le strategie risolutive comportano ragionamenti del tipo “facciamo finta che”, “supponiamo che”, e rendono particolarmente produttiva la discussione e la produzione di ipotesi da parte degli studenti che devono cimentarsi nell'uso di un linguaggio sempre più adeguato e preciso.

Scuola secondaria di secondo grado - primo biennio

NODI CONCETTUALI E ATTIVITÀ

Le attività, costruite in continuità con quelle della scuola secondaria di primo grado e legate al tema *Geometria*, sono di riferimento per i nodi concettuali fondamentali del nucleo “Relazioni e funzioni” e concorrono ad indirizzare gli studenti nell'uso consapevole della nozione di funzione e nella connessione tra le varie rappresentazioni funzionali. Non dimentichiamo infatti che il concetto di funzione è particolarmente importante nella costruzione e analisi di modelli per la soluzione di problemi ed è particolarmente significativo in un percorso didattico che ambisca a dare della matematica sia una dimensione culturale, sia una dimensione strumentale di disciplina atta a descrivere, interpretare e prevedere fenomeni e situazioni in diversi contesti disciplinari.

Il concetto di funzione lineare e funzione quadratica, sviluppato in modo sistematico e approfondito, da una parte permette di comprendere, utilizzando i vari registri interpretativi, il significato di andamento di una funzione, dall'altra permette di riferire le equazioni e disequazioni di primo e secondo grado agli zeri e ai segni di funzioni lineari.

NODI CONCETTUALI

- Concetto di funzione
- Funzioni lineari
- Funzioni quadratiche
- Funzioni costanti a tratti, lineari a tratti
- Modelli e problemi
- Cogliere e rappresentare relazioni fra numeri

- Usare consapevolmente notazioni e sistemi di rappresentazione diversi
- Proposizioni aperte; proposizioni equivalenti
- Introduzione alla funzione e alle equazioni
- Grafici e funzioni

ATTIVITÀ (I e II classe)

- A piccoli o grandi passi verso l'algebra
- Introduzione al concetto di funzione
- Allineamenti: esploriamo le funzioni lineari
- Risparmiare sulla bolletta del telefono
- Equazioni e disequazioni di primo grado
- Aree e pavimentazioni: esploriamo le funzioni quadratiche
- Rettangoli e fontane
- Diete alimentari II
- Concentrazione di un medicinale
- Potere d'acquisto del salario

- **A piccoli o grandi passi verso l'algebra**

L'attività proposta prende le mosse da un contesto ludico per guidare gli studenti lungo un percorso di riflessione sul passaggio dall'aritmetica all'algebra: dalle relazioni fra numeri alle funzioni, alle equazioni e alle dimostrazioni.

A partire dal concetto di unità di misura, gli studenti saranno stimolati a:

- consolidare i concetti che sottintendono alle operazioni, al fine di acquisire maggiori consapevolezza, autonomia e controllo nel processo di calcolo, nonché arricchire di significato eventuali automatismi acquisiti;
- scegliere, costruire, utilizzare strumenti per effettuare misure dirette o indirette di grandezze;
- scoprire e descrivere regolarità in situazioni osservate;
- produrre, verificare, sostenere e confutare congetture.

Gli studenti saranno poi guidati ad analizzare e successivamente a produrre problemi e a lavorare sulla modellizzazione di word-problems mediante diversi tipi di equazioni, confrontandone le diversità. Il problem posing e il problem solving stimoleranno contemporaneamente il pensiero logico e creativo.

- **Introduzione al concetto di funzione**

Il *concetto di funzione* è uno dei nodi più significativi che gli studenti incontrano nel loro percorso scolastico. Per evitare di correre il rischio di limitarsi a ripetere definizioni formalmente corrette ma vuote di significato, l'attività propone esperienze per una prima trattazione sistematica, esplicita e consapevole della nozione di funzione. Con l'obiettivo di costruire significati per il concetto di funzione, sono presentate situazioni legate al movimento, in particolare all'idea di una grandezza che varia nel tempo o ad alcune curve tracciate da punti in movimento. Le diverse rappresentazioni delle funzioni (numeriche, grafiche e simboliche) sono utilizzate da subito per evitare di confondere il concetto di funzione con una delle sue rappresentazioni. Il percorso proposto presta particolare attenzione allo sviluppo, da parte degli studenti, di un linguaggio adeguato (prima il linguaggio naturale e poi quello matematico) per descrivere qualitativamente l'andamento delle funzioni in termini di crescita o decrescenza e di modalità di crescita.

- **Allineamenti: esploriamo le funzioni lineari**

L'attività si riferisce al nodo concettuale *funzioni lineari* e si può considerare come naturale proseguimento della precedente, senza però esserne dipendente. È costruita in continuità verticale: da una parte fa riferimento alla proporzionalità diretta (tematica già della scuola secondaria di primo grado) per lo studio delle funzioni lineari, dall'altra pone una forte attenzione agli aspetti qualitativi dei grafici e alla connotazione funzionale anche nella risoluzione di equazioni e disequazioni per preparare il terreno allo studio delle funzioni con l'analisi matematica. L'attività non introduce la retta come oggetto della geometria analitica, ma esamina il modello lineare nei suoi vari aspetti in relazione principalmente a situazioni-problema incentrate sugli oggetti matematici. Gli studenti dovrebbero essere capaci, alla fine del percorso, di associare al registro grafico dell'allineamento di punti con l'origine il registro numerico di proporzionalità diretta, la formula $y = ax$ e i significati di pendenza e di quota.

- **Risparmiare sulla bolletta del telefono**

L'attività propone la costruzione di un modello matematico, che fa uso di funzioni lineari e funzioni lineari a

tratti, in un contesto sicuramente familiare agli studenti: quello della scelta, in base alla tariffa più conveniente, fra diverse offerte di contratti telefonici. Oltre a consentire di introdurre, oppure di consolidare, la conoscenza delle funzioni lineari, l'attività persegue un obiettivo di più vasta portata: suggerire l'uso di conoscenze e competenze matematiche per effettuare valutazioni ragionate e consapevoli in situazioni di vita quotidiana che richiedono scelte.

Il processo di costruzione del modello matematico avviene, come nelle altre attività, gradualmente, mediante l'uso di diversi registri che vanno dal linguaggio naturale, ai registri grafico e numerico per giungere infine a quello simbolico.

- **Equazioni e disequazioni di primo grado**

L'attività nasce dall'esigenza di affrontare un tema classico del percorso curricolare del biennio e si propone di avviare gli studenti ad una risoluzione algebrica consapevole e non puramente meccanica di equazioni e disequazioni di primo grado.

Equazioni e disequazioni sono considerate dapprima come proposizioni aperte e quindi trasformate – attraverso le proprietà delle relazioni di uguaglianza e disuguaglianza – in proposizioni equivalenti facilmente risolubili. Segue il ricorso alle rappresentazioni funzionali, con interpretazioni grafiche e numeriche delle proposizioni aperte e delle loro soluzioni, in continuità con altre proposte dello stesso nucleo; è rimandato ad altre attività il problema della traduzione dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico.

Il contesto problematico di semplici situazioni riferite alla vita quotidiana sottolinea l'importanza strumentale di equazioni e disequazioni nel processo di modellizzazione della realtà.

- **Aree e pavimentazioni: esploriamo le funzioni quadratiche**

L'attività, in continuità con le due precedenti e legata al nodo concettuale *funzioni quadratiche*, rafforza il concetto di funzione e l'uso dei suoi diversi registri rappresentativi.

A partire dal problema di analisi della spesa per la pavimentazione delle aule di una scuola, si esplorano gli andamenti delle funzioni quadratiche attraverso il confronto tra la rappresentazione grafica e il segno delle differenze prime, legate alla crescita/decrecenza, e le differenze seconde costanti, che denotano una crescita/decrecenza lineare.

Lo studio delle funzioni quadratiche è ampliato dalla discussione di questioni legate all'osservazione del cam-

biamento dei grafici per effetto delle traslazioni e all'analisi qualitativa dei grafici rispetto alla ricerca di simmetrie, di punto di massimo/minimo, di zeri.

- **Rettangoli e fontane**

L'attività propone alcune situazioni problematiche che hanno a che fare con funzioni quadratiche attraverso l'uso di questo tipo di funzioni come modelli per affrontare problemi relativi a situazioni realistiche. Essa consente di introdurre e consolidare conoscenze legate allo studio degli zeri, del segno e del valore di massimo o di minimo di una funzione quadratica.

Le tecnologie utilizzate (software di geometria dinamica, fogli elettronici, calcolatrici grafiche), grazie agli ambienti integrati e alle risorse che mettono a disposizione dell'utente, sono veri e propri strumenti didattici per la costruzione di significati degli oggetti di studio.

Come in tutte le altre attività, anche in questa si cerca di favorire l'uso di differenti registri di rappresentazione, in particolare di quelli numerici, grafici e simbolici.

- **Diete alimentari II**

L'attività costituisce un esempio di come sia possibile consolidare la conoscenza del concetto di funzione attraverso la costruzione di un modello per affrontare problemi relativi a diete alimentari, quindi in un contesto scientifico anche se strettamente legato a situazioni di vita quotidiana.

Il passaggio alla formalizzazione avviene gradualmente, con la costante attenzione a mantenere un forte controllo del significato dei simboli, grazie anche all'uso di registri di rappresentazione grafico-numerici.

L'attività può essere pensata in naturale continuità con quella realizzata per il terzo anno di scuola secondaria di primo grado, "Diete alimentari I"; al tempo stesso può essere estesa, portando ad affrontare problemi di ottimizzazione di complessità elevata per l'età degli studenti. Tali problemi potranno essere trattati e approfonditi in indirizzi scientifico-tecnologici o negli anni successivi a quelli del biennio.

- **Concentrazione di un medicinale**

L'attività propone lo studio di due sistemi dinamici discreti lineari.

Il primo di essi, più semplice, ha come modello una successione esponenziale decrescente, in quanto riguarda lo smaltimento di una quantità di penicillina tra un'assunzione e la successiva, sapendo che il corpo riesce a

smaltirne, ogni ora, una percentuale costante.

Il secondo, più complesso, riguarda l'evoluzione, a lungo termine, della quantità di farmaco nel sangue sapendo che tale farmaco viene assunto periodicamente in quantità costante e che, immediatamente prima dell'inizio della successiva assunzione, il corpo riesce a smaltire una percentuale costante di farmaco presente.

L'attività consente di utilizzare, in un contesto significativo e realistico, le nozioni di funzione, di successione, di crescita e decrescita di una successione, di differenze finite per lo studio del tipo di crescita, nonché di utilizzare procedure di calcolo e semplici algoritmi per affrontare problemi relativamente complessi.

L'uso delle tecnologie informatiche consente di mettere in evidenza la ricchezza di un approccio integrato al concetto di funzione con registri di rappresentazione diversi, come quelli della lingua naturale, numerico, grafico e simbolico.

- **Potere d'acquisto del salario**

L'attività può essere proposta come introduzione al concetto di funzione: infatti in uno degli esempi proposti per l'introduzione al concetto di funzione si è utilizzata parte della tabella di dati usata in questa attività.

Tutto il lavoro si svolge essenzialmente nei registri numerico e grafico, mentre quello simbolico resta sullo sfondo, richiamato solamente nell'uso delle formule in un foglio elettronico per il calcolo di numeri indice a base fissa e a base mobile e per lo studio della variazione del potere di acquisto del denaro e del salario rispetto a un dato paniere.

L'analisi dei dati e le successive osservazioni e considerazioni consentono di affrontare tematiche assai rilevanti per una partecipazione informata e consapevole alla cittadinanza.

4. Dati e previsioni

Questo nucleo propone attività dedicate alla statistica e alla probabilità e offre l'opportunità di avvicinare lo studio della matematica alla realtà quotidiana, creando nello studente curiosità verso le informazioni quantitative; egli stesso può raccoglierle sul mondo che lo circonda, pervenendo a: dati, misure, tabelle e loro elaborazioni, grafici che aiutano a comprendere fenomeni complessi. Valorizzando il contatto col mondo reale, lo studente può essere gradualmente guidato ad affrontare gli esiti di eventi incerti e la misura della verosimiglianza del loro verificarsi. Non è solo la vita quotidiana a poter richiedere la raccolta di informazioni quantitative, ma anche le attività sperimentali proprie delle scienze fisiche, biologiche, mediche, ecc. Ciò dà modo di fare affrontare agli studenti problemi di misura e di errori di misura, coinvolgendo argomenti di scienze, statistica e probabilità e mostrando la valenza interdisciplinare del nucleo. Nella esperienza didattica tradizionale questi sono temi del curriculum non molto sviluppati, alle volte emarginati e trattati solo in modo meccanico, facendo spesso ricorso a libri di testo non sempre adeguati.

È indispensabile saper cogliere i vantaggi che l'insegnamento/apprendimento di questi argomenti ha per le altre parti della matematica. Infatti uno sviluppo adeguato di statistica e probabilità è utile per passare in modo semplice dal linguaggio naturale a quello simbolico e per rafforzare numeri, geometria e relazioni. Tra l'altro la statistica offre la possibilità di far entrare contesti reali in classe, di affrontare gli argomenti con strategie di problem solving, anche avvalendosi dell'uso di fogli di calcolo di grande diffusione. Il momento della comunicazione, competenza di cui la società moderna fa largo uso, dà modo di esporre conclusioni basate su numeri prodotti elaborando dati.

La probabilità, coniugata con la statistica, offre poi strategie da perseguire per affrontare al meglio (e correttamente) l'incertezza; il chiedersi cosa potrà accadere al verificarsi di un evento casuale ed il poterlo verificare attraverso molti esperimenti sarà un elemento decisivo anche per superare alcune delle innumerevoli misconcezioni che, in ambito statistico ed in ambito probabilistico, sono, troppo spesso, presenti negli adulti.

NODI CONCETTUALI E ATTIVITÀ

Le attività di “Dati e previsioni” sono volte a toccare alcuni nodi concettuali essenziali di statistica e probabilità. Si tratta di attività ricche, che lasciano all’insegnante la scelta del livello di approfondimento a cui pervenire in classe. Tutte le attività si sviluppano in un’ottica laboratoriale, facendo perno su situazioni problematiche che gli studenti possono incontrare nella vita quotidiana, in modo da potenziare gli aspetti interdisciplinari del nucleo, da rispettare sempre il rigore della matematica, da offrire un contesto che favorisca la comprensione dei concetti e da seguire metodiche di tipo problem solving. Le unità dovrebbero aiutare gli studenti a sviluppare le competenze necessarie per avvicinarsi in modo intelligente all’incertezza che permea ogni istante della vita e ai risultati delle attività umane. Le attività sono ricche di note metodologiche per l’insegnante e di proposte di prove di verifica. Documentazioni e materiali chiariscono le conoscenze di base necessarie al docente per affrontare il tema in classe.

NODI CONCETTUALI

- Raccolta dei dati: rilevazioni con questionario
- Classificazione ed enumerazione
- Organizzazione e rappresentazione: tabelle e grafici
- Raccolta dei dati: statistiche ufficiali
- Elaborazione dei dati: frequenze assolute, frequenze relative e percentuali
- Valori medi
- Confronti di dati mediante rapporti e differenze
- Costruzione di eventi composti (spazio degli eventi)
- Risultati possibili di semplici esperimenti
- Assegnazione di probabilità ad un evento (classica o frequentista)
- Strategie risolutive per il calcolo della probabilità (complementare, incompatibilità, indipendenza)
- Strategie per un percorso di apprendimento scientifico: prova o verifica di congetture

ATTIVITÀ

- Come ci alimentiamo? (I e II classe)

- Dai dati ai grafici e... ritorno (I, II e III classe)
- Anche in statistica ci sono gli alberi... (I e II classe)
- Di media non ce n'è una sola I (I, II e III classe)
- Frequenza assoluta o frequenza relativa? (III classe)
- Esperimenti, ... esiti, ... eventi! (II e III classe)
- Tante strade conducono alla probabilità (III classe)
- Vorrei una figlia con i capelli rossi... (II e III classe)
- Ritrovarsi nelle statistiche ufficiali (II e III classe)
- L'Uomo di Vitruvio (III classe)

- **Come ci alimentiamo?**

L'attività affronta alcuni fondamentali nodi concettuali relativi alla conduzione di un'indagine statistica, utilizzando come tematica di riferimento l'alimentazione.

Il problema dell'alimentazione corretta ed equilibrata si inquadra nell'ampio tema della tutela della salute e risulta coinvolgente per gli alunni perché vicino al loro vissuto. L'argomento interdisciplinare può scaturire da considerazioni derivanti anche dallo studio del corpo umano e delle sue funzioni.

L'attività consente agli studenti di cimentarsi nella conduzione di una indagine statistica, di stimolare in loro la curiosità di "raccolgere informazioni", di coglierne i passi e le difficoltà per imparare a superarli, facendo così acquisire ai ragazzi la consapevolezza dell'importanza dell'attività svolta e del metodo per condurla. L'attività dà importanza sia alla fase di preparazione dell'indagine (la parte più "teorica") che chiede di definire accuratamente il fenomeno da studiare, il collettivo da osservare e le caratteristiche da rilevare per raggiungere l'obiettivo conoscitivo dell'indagine, sia alla fase operativa che include la rilevazione (ossia la raccolta delle informazioni), lo spoglio dei dati, la costruzione delle distribuzioni, la costruzione di tabelle e grafici per una prima analisi del fenomeno studiato.

- **Dai dati ai grafici e... ritorno**

Raccolti i dati su ciascun componente del collettivo di indagine è necessario classificarli ed enumerarli per poi affrontarne l'organizzazione e la rappresentazione in tabelle e grafici, così da rendere leggibili le informazioni sia a chi le ha raccolte sia a terzi ai quali sono presentate.

L'attività coniuga la conoscenza delle diverse rappresentazioni grafiche usate per le distribuzioni statistiche con la capacità di saperle costruire e la competenza di saper scegliere quella più adatta a risolvere il problema reale da studiare. L'attività mostra come una rappresentazione grafica possa aiutare ad analizzare la problematica studiata, cogliendone aspetti interessanti legati, ad esempio, alla disposizione dei dati. La rappresentazione grafica permette, infatti, di visualizzare l'andamento dei dati in modo più immediato rispetto ad una tabella e facilita i confronti fra situazioni diverse. La costruzione dei grafici porrà problemi non banali di raccordo con i nuclei "Numeri" e "Geometria", tenuto conto che, a seconda della natura del carattere elaborato (qualitativo sconnesso, qualitativo ordinato, quantitativo), i grafici da utilizzare per rappresentare la distribuzione sono diversi.

- **Anche in statistica ci sono gli alberi...**

L'attività si inserisce in ambito statistico multidisciplinare. Mira a sviluppare la capacità di costruire una semplice ma efficace rappresentazione grafica di dati quantitativi per identificare le caratteristiche informative della rappresentazione stessa e la sua potenza rappresentativa.

L'attività parte da semplici situazioni didattiche relative ad aspetti del vissuto degli alunni e passa a situazioni problematiche un po' più generali. Essa sviluppa le capacità di classificare, comparare, dare ordini di grandezza, arrotondare e stimare, tutti aspetti fondamentali per la analisi statistica dei dati. L'unità sviluppa anche una parte relativa alla ricerca della struttura soggiacente ad un insieme di dati, in modo da scoprirne eventuali anomalie. Dall'osservazione del diagramma proposto, l'alunno è inoltre stimolato anche alla formulazione di congetture relative alle caratteristiche dei dati in oggetto e a una prima assegnazione di probabilità del verificarsi di un evento.

L'insegnante può attuare tutta la sequenza proposta, ma può anche agevolmente sceglierne solo le parti ritenute più adeguate alla situazione della propria classe e riprenderne e approfondirne i contenuti in momenti diversi negli anni della scuola secondaria di primo grado.

- **Di media non ce n'è una sola I**

L'attività si inserisce in ambito statistico e riguarda la possibilità di sintetizzare una distribuzione attraverso l'uso di un appropriato valore medio. Ciò implica la conoscenza dei più noti valori medi e delle loro caratteristiche e proprietà.

L'attività mira all'acquisizione, da parte dello studente, della capacità di saper scegliere il valor medio idoneo tenuto conto del problema da risolvere, di saperlo calcolare ed interpretare in contesti reali a partire da situazioni problematiche che gli studenti possono incontrare nella quotidianità.

Si intende con ciò mostrare che la media aritmetica non è l'unico indice di sintesi della "grandezza" del fenomeno studiato e che in ambito statistico sono disponibili ed utilizzabili altri valori medi che mettono in luce altre importanti caratteristiche di una distribuzione come la moda e la mediana. Analizzando da una parte le condizioni poste dal problema reale e dall'altra ricordando le definizioni e le caratteristiche di ciascun valore medio, è possibile individuare il valore medio che sintetizza la distribuzione studiata in modo opportuno.

- **Frequenza assoluta o frequenza relativa?**

Questa attività intende far riflettere su avvenimenti reali legati ai giochi di sorte come Lotto, Superenalotto, ecc. Questo approccio dovrebbe favorire una discussione e dunque una riflessione che metta in evidenza i numerosi misconcetti e fraintendimenti che sono alla base delle considerazioni che vengono fatte dalla maggior parte di noi nelle situazioni di incertezza. Tali fraintendimenti nascono anche dalla mancata distinzione tra frequenza assoluta e frequenza relativa.

Con questa attività si vuole favorire la consapevolezza nello studente che, ad esempio:

1. Non è vero che in tanti lanci il numero di *Testa* è vicino al numero di *Croce*;
2. Non è vero che la frequenza assoluta ci dirà, all'aumentare del numero delle prove, quanto sia la probabilità;
3. Non è vero che se in un certo numero di prove è uscito un gran numero di *Testa*, deve esserci un recupero di *Croce* perché la frequenza relativa è un numero vicino al 50%;
4. Il numero "pigro" non ha memoria, in generale il caso non ha memoria.

L'attività di apprendimento si basa su due interpretazioni della probabilità, quella frequentista e quella classica. Dalla simulazione dell'esperimento casuale, lancio ripetuto di una moneta bilanciata, si ottengono i dati su cui osservare delle regolarità fino ad arrivare all'assegnazione della probabilità di ottenere una faccia secondo l'approccio frequentista. Successivamente il risultato viene confrontato con l'assegnazione classica di probabilità allo stesso esito.

- **Esperimenti, ... esiti, ... eventi!**

L'attività è strettamente legata anche a riflessioni sull'uso della lingua italiana (si auspica una collaborazione con il docente di lettere).

Lo studio dei possibili risultati di un esperimento casuale (esiti di un esperimento casuale) ha una forte valenza formativa e risulta particolarmente motivante per gli studenti perché offre l'opportunità di presentare esempi di vita quotidiana, così da evitare che questi argomenti vengano visti unicamente in funzione dei giochi di sorte e della soluzione di problemi a essi relativi.

Con questa attività si vuole far acquisire agli allievi l'importanza di conoscere, comprendere e utilizzare le informazioni disponibili per l'esperimento casuale che si intende condurre, al fine di pervenire alla corretta individuazione di tutti gli esiti possibili (spazio degli eventi elementari). In tal modo si favorirà il passaggio dal concetto di esperimento casuale a quello di risultato di un esperimento casuale, poi allo spazio dei campioni ed infine alla distinzione fra eventi elementari ed eventi composti.

- **Tante strade conducono alla probabilità**

L'attività si inserisce in ambito statistico e probabilistico. L'insegnamento della probabilità, oltre ad avere una forte valenza formativa, risulta particolarmente motivante per gli studenti perché offre l'opportunità di presentare esempi di situazioni che i ragazzi possono incontrare nella vita di tutti i giorni, in modo da evitare che la probabilità venga vista unicamente in funzione dei giochi di sorte e della soluzione di problemi ad essi connessi.

L'attività ha lo scopo di indurre gli allievi a comprendere che esistono eventi per i quali non è possibile assegnare la probabilità secondo la metodologia classica perché, pur conoscendo il modo con cui un esperimento casuale si svolge, non è possibile ritenere equiprobabili gli esiti elementari ad esso associati. Si apre così la strada all'assegnazione frequentista di probabilità e talvolta ad altre strategie di assegnazione di probabilità.

- **Vorrei una figlia con i capelli rossi...**

In questa attività l'"incertezza" viene affrontata in ambito interdisciplinare (ad es. in genetica) aprendo allo studente la consapevolezza di una possibile unitarietà di approccio al mondo scientifico.

La confidenza già maturata con alcuni termini statistici (frequenza assoluta e relativa, confronto fra dati, media, moda, ecc.), contestualmente alla lettura di risultati di semplici esperimenti, offre allo studente numerose opportunità per immergersi nel cammino che porta ad affrontare le situazioni tipiche dell'incertezza ed a sviluppare

il primo, embrionale, concetto di probabilità.

L'assegnazione della probabilità ad eventi casuali (esiti di un esperimento casuale) si configura come occasione per riflettere sia su alcuni aspetti concreti che ci vengono dalla vita quotidiana sia sull'atteggiamento da assumere nei confronti dei giochi di sorte.

L'attività ha lo scopo di far acquisire agli allievi l'importanza di conoscere, comprendere e utilizzare le informazioni disponibili sull'esperimento casuale che si intende condurre, per una corretta assegnazione della probabilità agli eventi che un esperimento casuale può produrre.

- **Ritrovarsi nelle statistiche ufficiali**

L'attività si inserisce in ambito statistico. Mira a sviluppare negli studenti la capacità di orientarsi riguardo la qualità dei dati, di distinguere i dati statistici di fonte ufficiale rispetto ad altri e a creare la possibilità di scoprire la ricchezza di informazioni quantitative offerte dalle statistiche ufficiali, sia del MIUR sia dell'ISTAT.

L'attività presenta due situazioni problematiche che ogni allievo può incontrare nella sua quotidianità: l'una, il "contarsi a scuola", è connessa al ruolo di studente; l'altra, come cittadino del Paese e del mondo, lo conduce a chiedersi "quanto siamo stretti sulla Terra?".

L'attività, partendo dalle situazioni problematiche presentate, rende l'utilizzo di tabelle e grafici statistici strategico per fornire le risposte ai problemi posti, induce a comprenderne il significato e ad operare, in contesti reali, confronti mediante rapporti e differenze.

L'unità, che prevede un largo uso del web per la ricerca di dati, lascia ai docenti la scelta di guidare gli studenti nella navigazione tra i siti per raccogliere le informazioni quantitative o utilizzare il percorso indicato avvalendosi dei materiali proposti.

- **L'Uomo di Vitruvio**

L'attività ha tutte le caratteristiche di un percorso di apprendimento scientifico: parte dall'analisi di un'opera di Leonardo da Vinci, *L'Uomo vitruviano*, formula un'ipotesi e, attraverso la rilevazione di dati opportuni, prova le congetture proposte, usando rapporti tra grandezze omogenee rappresentate e studiate con chiavi di lettura geometriche, aritmetiche e statistiche.

L'unità si presta a una attività finale per la terza classe e risulta utile per rafforzare concetti di base di statistica descrittiva come la raccolta dei dati, la tipologia dei caratteri e le loro modalità, la costruzione di diagrammi

ramo-foglia, tabelle, istogrammi e per affrontare, consolidandoli, anche altri temi quali: il rapporto, l'arrotondamento, la misura, il piano cartesiano e le funzioni.

Si rivela funzionale alla realizzazione di un percorso pluridisciplinare con italiano, storia, scienze, scienze motorie e arte e immagine; richiede la collaborazione di docenti e alunni tramite modalità di tipo laboratoriale; può essere svolta parallelamente in più classi; offre spunti per fare un cenno alla storia della scienza; interviene positivamente sulla motivazione degli studenti, anche quelli più "deboli", che, partecipando attivamente alle diverse fasi proposte, divengono protagonisti del proprio apprendimento.

Scuola secondaria di secondo grado - primo biennio

NODI CONCETTUALI E ATTIVITÀ

Gli argomenti (ed i nodi concettuali) della statistica e della probabilità sviluppano, nella scuola secondaria di secondo grado, gli aspetti ed i temi analoghi affrontati nel periodo scolastico precedente, approfondendoli anche in modo formale. Le attività di "Dati e previsioni" ricevono pertanto nel biennio della secondaria di secondo grado una organizzazione più adatta all'età degli studenti, in modo da offrire loro anche un aiuto per riaffrontare il passaggio dal linguaggio naturale a quello simbolico.

Le attività sono molto ricche e lasciano all'insegnante la scelta del livello di approfondimento a cui pervenire in classe. Tutte le attività si sviluppano in un'ottica laboratoriale, facendo perno su situazioni problematiche che gli studenti possono incontrare nella vita quotidiana, in modo da potenziare gli aspetti interdisciplinari del nucleo rispettando sempre il rigore della matematica. Le attività dovrebbero aiutare gli studenti a sviluppare le competenze necessarie per avvicinarsi in modo intelligente all'incertezza che permea ogni istante della vita e ai risultati delle attività umane.

Le attività proposte sono ricche di note metodologiche per l'insegnante e di proposte di prove di verifica. Documentazioni e materiali chiariscono le conoscenze di base necessarie al docente per affrontare il tema in classe.

NODI CONCETTUALI

- Classificazione dei caratteri: distribuzione di frequenze assolute, relative, cumulate e loro uso
- Grafici e loro tipologie

- Elaborazione dei dati: valori medi
- Elaborazione dei dati: variabilità
- Confronti tra dati
- Eventi elementari; composti (spazio degli eventi); eventi condizionati
- Strategie risolutive per l'assegnazione di probabilità ai diversi tipi di evento
- Variabili casuali: basi concettuali

ATTIVITÀ (I e II classe)

- I giovani e la musica
- Pivot è bello
- I grafici... questi sconosciuti
- Di media non ce n'è una sola II
- Siamo "vincoli" o "sparpagliati"?
- Navigando tra i dati
- Un gioco con tre dadi
- Dolci... eventi
- Qual è la probabilità di... sapendo che...
- Stocastica e... legami intradisciplinari

- **I giovani e la musica**

Il contesto di questa attività è di carattere extrascolastico e riguarda l'ambito sociale. L'attività prevede la conduzione di una indagine statistica su una problematica scelta e condivisa con gli studenti; essa va dalla predisposizione del questionario alla raccolta dei dati, alla loro elaborazione e rappresentazione grafica e infine alla loro interpretazione.

L'attività parte dal presupposto che rendere protagonista lo studente mediante tematiche che lo coinvolgono direttamente si è rivelata una metodologia vincente sotto l'aspetto della motivazione. L'attività svolge anche il ruolo di riassumere, integrare e utilizzare conoscenze e competenze di statistica eventualmente acquisite nei precedenti anni scolastici.

Essa è proposta come attività iniziale del percorso legato al nucleo "Dati e previsioni" e tocca i nodi concettuali legati

alla classificazione dei caratteri, alla loro distribuzione di frequenze – sia assolute, sia relative, sia percentuali –, alla scelta del grafico più opportuno a rappresentare le distribuzioni e alla sintesi delle distribuzioni tramite valori medi.

- **Pivot è bello**

Questa attività può essere introdotta, nella forma che qui viene proposta, in una classe del primo biennio quando gli studenti hanno acquisito abilità di base sull'utilizzo del foglio elettronico (selezionare, copiare, incollare, indirizzamenti assoluti e relativi, creazione guidata dei grafici, ecc.).

Dopo che gli studenti hanno svolto semplici indagini su alcuni aspetti che li coinvolgono direttamente ed hanno imparato ad effettuare lo spoglio manuale di dati provenienti da una indagine effettuata su un piccolo numero di unità, l'attività proposta diventa molto utile quando l'indagine riguarda un collettivo statistico numeroso che richiede lo spoglio e il conteggio di molti dati.

L'attività evidenzia la necessità della "codifica numerica" delle informazioni acquisite e la predisposizione di un database contenente in ogni record tutte le caratteristiche osservate per ogni unità statistica (prospetto di spoglio). La costruzione della distribuzione di frequenza associata ad un carattere viene effettuata attraverso l'uso del foglio elettronico (strumento tabelle pivot) che rende comoda e agevole la manipolazione di una grande quantità di dati tratti da un database.

L'attività mostra che l'uso del foglio elettronico facilita l'analisi delle distribuzioni di frequenza sia attraverso il calcolo di valori medi e varianza sia la loro rappresentazione grafica.

L'attività può essere attuata partendo da un'indagine realmente svolta dalla classe in modo da lavorare su un numero consistente di dati reali e/o da dati recuperati da diversi siti che mettono a disposizione banche di dati come ad esempio quello dell'ISTAT, del CIRDIS, dell'International Statistical Literacy Project, dell'International Association for Statistical Education.

L'alternanza tra la lezione frontale e il lavoro di gruppo in laboratorio è utile alla comprensione delle nozioni e all'acquisizione delle competenze e può aiutare anche il recupero e l'interesse di studenti in difficoltà.

- **I grafici... questi sconosciuti**

L'attività si inserisce in ambito statistico con collegamenti interdisciplinari ed extrascolastici.

L'attività coniuga la conoscenza delle diverse rappresentazioni grafiche delle distribuzioni statistiche con la capacità di saperle costruire e la competenza di saper scegliere quella più adatta a risolvere il problema reale da

studiare rispetto al tipo di carattere studiato e al contesto.

L'attività mette in gioco situazioni problematiche che gli studenti possono incontrare nella quotidianità e che potranno ritrovare da adulti.

Innanzitutto si intende mostrare come una rappresentazione grafica possa aiutare ad analizzare la problematica studiata cogliendone aspetti interessanti legati, ad esempio, alla disposizione dei dati.

Si vuole far emergere che esistono diverse tipologie di rappresentazione grafica e che è necessario scegliere di volta in volta quella più idonea a rappresentare il problema oggetto di studio, in relazione al carattere studiato e all'informazione che si vuole estrarre dalla distribuzione da rappresentare. Particolare attenzione viene rivolta a quelle situazioni in cui, attraverso lo studio di una rappresentazione grafica, si può giungere a conclusioni errate o per una scelta non idonea del grafico usato o per la costruzione errata dello stesso.

- **Di media non ce n'è una sola II**

L'attività si inserisce in ambito statistico e coniuga la conoscenza dei principali valori medi per caratteri quantitativi e delle loro proprietà con la capacità di saperli calcolare, tenuto conto del modo in cui i dati sono presentati, del loro contesto e con la competenza di saper scegliere fra i diversi valori medi (moda, mediana, aritmetica, geometrica, armonica, ecc.) quello più opportuno per risolvere il problema da affrontare.

L'attività mette in gioco situazioni problematiche che gli studenti possono incontrare nella quotidianità e che potranno ritrovare da adulti.

Analizzando da una parte le condizioni poste dal problema da risolvere e dall'altra le definizioni e le proprietà dei valori medi è possibile arrivare ad una soluzione soddisfacente e condivisa del problema della sintesi di una distribuzione in contesti diversi.

L'attività inoltre offre lo spunto, conoscendo le proprietà, anche formali, legate ai diversi tipi di media, di utilizzare questi ultimi in modo consapevole e corretto nella risoluzione del problema. Le applicazioni proposte sono estese anche a situazioni legate ad altri ambiti disciplinari.

- **Siamo “vincoli” o “sparpagliati”?**

Quando si esaminano fenomeni collettivi (ad es. la piovosità in un luogo in un anno) si osserva che la caratteristica studiata può assumere una pluralità di modalità qualitative o quantitative (ossia la piovosità cambia di anno in anno) e ciò porta alla necessità di costruire indici che sintetizzino alcuni aspetti dei dati osservati. Lo

studio dei valori medi ha lo scopo di sintetizzare l'insieme dei dati in un unico valore che possa rappresentarli tutti. Queste sintesi non sono però sufficienti a descrivere il fenomeno studiato ed è necessario costruire altri indici capaci di dare informazioni sulla diversità dei dati.

Questa attività si configura come un percorso per l'analisi della variabilità di dati osservati attraverso la costruzione di indici che mettano in luce la variabilità fra i dati oppure rispetto ad un valore medio preso come termine di riferimento. Anche in questo caso l'uso e la comprensione della geometria potrà aiutare gli studenti a meglio comprendere i concetti proposti e la loro misura.

L'attività è stata predisposta in modo che siano possibili diversi livelli di approfondimento, tenuto conto delle conoscenze e competenze già sviluppate dagli studenti.

- **Navigando tra i dati**

La massa delle informazioni con le quali un cittadino deve quotidianamente confrontarsi gli impone la conoscenza del modo in cui tali informazioni vengono raccolte, rappresentate, sintetizzate, comunicate e utilizzate. Inoltre è importante che lo stesso cittadino sia in grado di interpretare il linguaggio che tali informazioni utilizzano in modo da capirle e da saperle correttamente confrontare. Nell'attività sono state utilizzate fonti ufficiali vicine al mondo scolastico o inerenti ad alcune attività offerte dalla scuola. Le proposte riguardano: l'analisi della popolazione scolastica straniera e la sua evoluzione confrontata anche con la presenza di studenti stranieri in classe; lo studio di informazioni quantitative sulla infortunistica stradale e la loro analisi (anche in ragione della possibilità, da parte delle scuole, di far acquisire agli studenti il patentino per la guida del ciclomotore); l'analisi di alcune "piramidi dell'età" per riflettere sulla distribuzione per età della popolazione attuale confrontata con quella dei padri e dei nonni degli studenti e per confrontare la popolazione italiana con quelle di altri Paesi.

- **Un gioco con tre dadi**

L'attività ha lo scopo di indurre a una individuazione corretta dello spazio degli eventi elementari, in modo che gli studenti sappiano distinguere tra evento elementare, risultato minimo dell'esperimento (ovvero un evento non più ulteriormente suddivisibile in altri eventi) ed evento casuale (inteso generalmente come evento composto) e infine assegnare a essi la corrispondente probabilità.

L'approccio operativo proposto per l'attività non necessita di prerequisiti particolari, non sono necessarie definizioni né teoremi sulle probabilità. Passo dopo passo l'attività porta a scoprire concetti importanti quali lo spa-

zio degli eventi elementari associato ad un esperimento casuale, l'evento casuale, l'assegnazione della probabilità agli eventi (come rapporto fra casi favorevoli e casi possibili), scoprendo così che non tutti gli eventi hanno la stessa probabilità e che la probabilità dipende strettamente dal modo in cui l'esperimento casuale è definito. Ciascuna fase dell'attività parte dall'effettuazione materiale dell'esperimento proposto (lancio dei dadi) cui segue l'annotazione degli esiti realizzati e giunge infine alla simulazione dell'esperimento stesso usando il foglio di calcolo. Successivamente, attraverso la costruzione di tabelle e grafici, si perviene all'assegnazione della probabilità ai diversi esiti ed all'analisi dei risultati ottenuti.

La caratteristica fondamentale dell'attività è l'attenzione al contesto, cioè al modo in cui l'esperimento casuale viene eseguito e al suo legame con l'assegnazione delle probabilità agli eventi ad esso associato.

Interessante è anche lo spunto storico in quanto l'argomento offre la possibilità di ricordare quello che in quasi tutti i libri viene descritto come l'inizio del calcolo delle probabilità, ovvero lo scambio epistolare tra Pascal e Fermat relativamente al quesito posto dal "Cavaliere di Méré".

- **Dolci... eventi**

Partendo dalla considerazione che nella realtà gli esiti di qualunque tipo di attività non sono noti a priori, attraverso l'esame di diverse situazioni problematiche si intende condurre gli allievi a considerare gli esiti elementari associati ai diversi esperimenti casuali e a costruire eventi composti.

Questa attività ha lo scopo di indurre ad un'individuazione corretta dello spazio degli eventi per esperimenti casuali, punto chiave per affrontare il tema dell'assegnazione di probabilità ad eventi semplici o composti.

L'attività punta sull'uso corretto del linguaggio degli eventi che verrà perciò approfondito a partire dalla formulazione corretta dell'esperimento che origina la situazione problematica. Grafi e tabelle sono gli strumenti didattici proposti per l'individuazione degli spazi degli eventi e di loro particolari sottospazi.

- **Qual è la probabilità di... sapendo che...**

L'attività affronta le prime considerazioni relative a eventi condizionati, cioè ad eventi che si verificano "subordinatamente" al verificarsi di altri eventi. Ciò contribuisce, forse in modo determinante, a mettere l'allievo sulla strada di quella riflessione critica che tanto potrà essergli utile nella sua vita da "cittadino". L'attività ha lo scopo di indurre ad un'individuazione corretta dello spazio degli eventi, in modo che lo studente sappia distinguere tra evento (inteso generalmente come evento composto) ed evento elementare (l'esito elementare dell'espe-

rimento casuale ovvero un evento non più ulteriormente suddivisibile in altri eventi). L'obiettivo è quello di condurre gli studenti alla scoperta che non tutti gli eventi hanno la stessa probabilità e che la probabilità dipende totalmente dal modo in cui l'esperimento è definito e di assegnare la probabilità ad eventi composti in diversi contesti problematici. L'attività porta ad individuare eventi dipendenti ed eventi indipendenti, come pure eventi provenienti da esperimenti articolati in più fasi fino ad assegnare a ciascuno le rispettive probabilità (probabilità composte, totali, regola di Bayes).

Anche l'uso della tecnologia (simulazione, foglio elettronico, ecc.) è a disposizione dell'allievo nell'ambito delle strategie risolutive di assegnazione della probabilità, per affrontare situazioni nelle quali l'elaborazione del numero dei casi e la casistica generale potrebbero impedire allo studente di cogliere l'essenza probabilistica della situazione che ha davanti; ecco allora che la simulazione col calcolatore si rende necessaria per una migliore didattica che consenta all'allievo di evitare (o superare) un'errata interpretazione probabilistica.

- **Stocastica e... legami intradisciplinari**

La statistica offre all'insegnante una pluralità di contesti nei quali è possibile recuperare attività interessanti e stimolanti da presentare in classe; queste attività permetteranno di aiutare gli studenti ad acquisire conoscenze e abilità e di sviluppare competenze che serviranno quando, adulti, dovranno confrontarsi e rispondere a domande sulla realtà in cui vivono.

L'unità mira a far di ricordare ai docenti che il pensiero probabilistico e statistico merita sempre più attenzione sia perché esso domina in molti campi (fisico, biologico, economico, demografico, ecc.) sia perché è un ambito ricco di stimolanti problematiche, la risoluzione delle quali conduce a quell'insegnamento orientato all'attività euristica e "per problemi" che si è dimostrato essere il metodo più adatto a favorire l'interesse e l'apprendimento degli studenti.

Questa attività fa ricorso ad alcune situazioni in cui i legami tra l'analisi statistica di dati e/o il calcolo delle probabilità e le attività degli altri nuclei tematici sono correlate, così da poter offrire ai docenti altri esempi per introdurre, completare o integrare il loro percorso didattico nel biennio.

L'attività presenta: un collegamento tra i dati rilevati sperimentalmente della misura di una grandezza fisica e la loro analisi statistica per poter evidenziare gli errori casuali; una introduzione alle variabili casuali, alla loro distribuzione di probabilità e al loro utilizzo in alcuni contesti semplici; un collegamento tra la geometria ed alcune medie algebriche per capirne il significato formale.

5. Percorsi nelle attività

PERCORSI PER NUCLEI I GRADO

NUMERI		GEOMETRIA	
ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI	ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI
Algoritmi insoliti per la moltiplicazione e per le altre operazioni	Linguaggio naturale e linguaggio matematico	L'albero maestro	Distanza punto/retta; altezze; perpendicolarità
Numeri primi conosciuti e sconosciuti	Numeri primi, multipli e divisori	L'orologio	Angoli: confronto, operazioni e misura
I chicchi di riso	Ordine di grandezza	Regina reginella	Simmetria spaziale e numeri interi relativi: piano cartesiano
Frazioni in movimento	Approccio ai razionali, numeri sulla retta	Costruire poligoni	Poligoni, costruzioni geometriche, congetture, argomentazioni
Quante persone in Piazza del Popolo per il concerto di Capodanno?	Ordine di grandezza. Stima e plausibilità di un calcolo	Regolarità e simmetria	Regolarità nel mondo reale, traslazioni e simmetrie
Proprietà dei numeri razionali	Approccio ai razionali, numeri sulla retta. Proprietà dei numeri naturali, interi, decimali, razionali	Definire i quadrilateri con le simmetrie	Definizione, classificazione dei quadrilateri
Un'eclissi di Sole	Linguaggio naturale e linguaggio matematico	La foto	Rapporti tra grandezze, proporzionalità diretta, modellizzazione
Parli il "matematiche"? Dal problema all'espressione e all'equazione	Dai problemi alle espressioni e viceversa	La città misteriosa	Similitudine: congruenza degli angoli, proporzionalità dei lati
Dei viaggiatori, delle patate e... altro		Misurare il cerchio	Cerchio: diametro, circonferenza, area
Matrioske matematiche	Proprietà dei numeri naturali, interi, decimali, razionali	Solidi noti e solidi misteriosi	Rappresentazione mentale e grafica di solidi, loro proprietà

PERCORSI PER NUCLEI
I GRADO

RELAZIONI E FUNZIONI	
ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI
I miei numer-amici	Proprietà e relazioni in vari contesti
Un volantino, tanti problemi	
Diversi tra confini uguali	Uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà
Il numero... di ferro	Proporzionalità diretta
Mettiamo in equilibrio	Proporzionalità inversa
Sì, ma quanto sarò alto?	Proprietà e relazioni in vari contesti
Il figlio del re	
Diete alimentari I	
Il valore dei soldi	Uso delle lettere per esprimere in forma generale relazioni e proprietà
Le camicie di Diofanto	Problemi ed equazioni di primo grado

DATI E PREVISIONI	
ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI
Come ci alimentiamo?	Raccolta dei dati: rilevazioni con questionario. Classificazione: frequenza assoluta
Dai dati ai grafici e... ritorno	Organizzazione e rappresentazione: tabelle e grafici
Anche in statistica ci sono gli alberi...	Classificazione: dati quantitativi
Di media non ce n'è una sola I	Elaborazione dei dati: frequenze relative e percentuali. Valori medi
Frequenza assoluta o frequenza relativa?	Protocollo di sperimentazione. Assegnazione di probabilità ad un evento (classica, frequentista)
Esperimenti, ... esiti, ... eventi!	Costruzione di eventi composti (spazio degli eventi)
Tante strade conducono alla probabilità	Risultati possibili di semplici esperimenti. Assegnazione di probabilità ad un evento (classica, frequentista)
Vorrei una figlia con i capelli rossi...	Strategie risolutive per il calcolo della probabilità (complementare, incompatibilità, indipendenza)
Ritrovarsi nelle statistiche ufficiali	Raccolta dei dati: statistiche ufficiali. Confronti di dati mediante rapporti e differenze
L'Uomo di Vitruvio	Strategie per un percorso di apprendimento scientifico: prova o verifica di congetture

PERCORSI PER NUCLEI
II GRADO

NUMERI		GEOMETRIA	
ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI	ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI
Dalla frazione al numero decimale: esploriamo	Rappresentazioni diverse ed equivalenti di numeri razionali	Ville e palazzi: forme geometriche e simmetrie	Passaggio dal linguaggio naturale al linguaggio geometrico: forme geometriche e simmetrie
Il livello del mare	Ordine di grandezza, precisione e approssimazione	Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione	Assiomatica: verifica empirica e validazione teorica
Clessidre e bastoncini	Numeri primi, multipli e divisori. Linguaggio naturale e linguaggio algebrico	Problemi di minimo nel piano	Isometrie per comprendere situazioni e risolvere problemi
Numeri primi e poligoni stellati	Numeri primi, multipli e divisori	Il teorema di Pitagora tra leggenda e storia	Teorema di Pitagora: equivalenza ed equiscomponibilità
Numeri sulla retta	Ordinamento e densità	Simmetrie nei poliedri	Visione spaziale, proprietà di oggetti tridimensionali e loro rappresentazione su un piano
Quel che vedo è sempre vero	Linguaggio naturale e linguaggio algebrico	Studenti in movimento	Modellizzazione di situazioni nel piano cartesiano; rapporti tra grandezze, pendenza
Il foglio A4	Concettualizzazione dei numeri reali	Ognuno cresce a modo suo	Variazione di grandezze geometriche e relazioni tra di esse: funzioni
Eredità e bagagli: dal linguaggio naturale al linguaggio dell'algebra	Linguaggio naturale e linguaggio algebrico	Ombre e proporzionalità	Similitudini e teorema di Talete; modelli proporzionali e additivi
L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica	Significato delle espressioni algebriche e del loro calcolo	Superfici comode e scomode	Misure dirette di aree tramite approssimazioni; misure indirette tramite formule
Attento a come parli!	Linguaggio matematico e ragionamento	Tangram e tassellazioni	Tassellazioni: equiscomponibilità, equivalenza, isoperimetria di figure e relazioni algebriche

PERCORSI PER NUCLEI
II GRADO

RELAZIONI E FUNZIONI	
ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI
A piccoli o grandi passi verso l'algebra	Concetto di equazione. Concetto di funzione
Introduzione al concetto di funzione	
Allineamenti: esploriamo le funzioni lineari	Funzioni lineari
Risparmiare sulla bolletta del telefono	
Equazioni e disequazioni di primo grado	
Aree e pavimentazioni: esploriamo le funzioni quadratiche	Funzioni quadratiche
Rettangoli e fontane	
Potere d'acquisto del salario	Modelli e problemi
Diete alimentari II	
Concentrazione di un medicinale	

DATI E PREVISIONI	
ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI
I giovani e la musica	Classificazione dei caratteri: distribuzione di frequenze assolute, relative e loro uso
Pivot è bello	Classificazione dei caratteri: distribuzione di frequenze assolute, relative, cumulate e loro uso
I grafici... questi sconosciuti	Grafici e loro tipologie
Di media non ce n'è una sola II	Elaborazione dei dati: valori medi
Siamo "vincoli" o "sparpagliati"?	Elaborazione dei dati: variabilità
Navigando tra i dati	Confronti tra dati
Un gioco con tre dadi	Eventi elementari; composti (spazio degli eventi)
Dolci... eventi	Eventi elementari; composti; condizionati (spazio degli eventi)
Qual è la probabilità di... sapendo che...	Strategie risolutive per l'assegnazione di probabilità ai diversi tipi di evento
Stocastica e... legami intradisciplinari	Variabili casuali: basi concettuali

PERCORSI PER TEMA
“COMPRENDERE E USARE IL LINGUAGGIO MATEMATICO”
I GRADO

NUCLEO	ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI
RELAZIONI E FUNZIONI	I miei numer-amici	Proprietà e relazioni in vari contesti
	Un volantino, tanti problemi	
NUMERI	Algoritmi insoliti per la moltiplicazione e per le altre operazioni	Linguaggio naturale e linguaggio matematico
DATI E PREVISIONI	Di media non ce n'è una sola I	Elaborazione dei dati: frequenze relative e percentuali. Valori medi
GEOMETRIA	Regolarità e simmetria	Regolarità nel mondo reale, traslazioni e simmetrie
	Costruire poligoni	Costruzioni geometriche, congetture, argomentazioni
NUMERI	Parli il “matematiche”? Dal problema all’espressione e all’equazione	Dai problemi alle espressioni e viceversa
DATI E PREVISIONI	Anche in statistica ci sono gli alberi...	Classificazione: dati quantitativi. Costruzione di eventi composti (spazio degli eventi)
	Esperimenti, ... esiti, ... eventi!	
RELAZIONI E FUNZIONI	Il figlio del re	Proprietà e relazioni in vari contesti
GEOMETRIA	Definire i quadrilateri con le simmetrie	Definizione, classificazione dei quadrilateri

PERCORSI PER TEMA
“COMPRENDERE E USARE IL LINGUAGGIO MATEMATICO”
II GRADO

NUCLEO	ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI
NUMERI	Quel che vedo è sempre vero	Linguaggio naturale e linguaggio algebrico
GEOMETRIA	Ville e palazzi: forme geometriche e simmetrie	Dal linguaggio naturale al linguaggio geometrico
DATI E PREVISIONI	Pivot è bello	Classificazione dei caratteri: distribuzione di frequenze assolute, relative, cumulate e loro uso
RELAZIONI E FUNZIONI	A piccoli o grandi passi verso l'algebra	Concetto di equazione e di funzione. Uso del linguaggio per dimostrare
	Introduzione al concetto di funzione	Concetto di funzione
	Equazioni e disequazioni di primo grado	Relazioni di uguaglianza e di disuguaglianza. Proposizioni aperte; proposizioni equivalenti
GEOMETRIA	Esplorazione di figure piane: dalle congetture alla dimostrazione	Assiomatica: verifica empirica e validazione teorica
NUMERI	Eredità e bagagli: dal linguaggio naturale al linguaggio dell'algebra	Linguaggio naturale e linguaggio algebrico
DATI E PREVISIONI	Qual è la probabilità di... sapendo che...	Strategie risolutive per l'assegnazione di probabilità ai diversi tipi di evento
NUMERI	L'aritmetica aiuta l'algebra e l'algebra aiuta l'aritmetica	Significato delle espressioni algebriche e del loro calcolo
	Attento a come parli!	Linguaggio matematico e ragionamento

PERCORSI PER TEMA
“MODELLIZZARE E RISOLVERE PROBLEMI”
I GRADO

NUCLEO	ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI
DATI E PREVISIONI	Come ci alimentiamo?	Raccolta dei dati: rilevazioni con questionario. Classificazione: frequenza assoluta
NUMERI	I chicchi di riso	Stima e plausibilità di un calcolo
RELAZIONI E FUNZIONI	Si, ma quanto sarò alto?	Proprietà e relazioni in vari contesti
GEOMETRIA	La foto	Modellizzazione; similitudine; rapporti tra grandezze
NUMERI	Un’eclissi di Sole	Ordine di grandezza
GEOMETRIA	La città misteriosa	Similitudine: congruenza degli angoli, proporzionalità dei lati
	Misurare il cerchio	Cerchio: diametro, circonferenza, area
NUMERI	Dei viaggiatori, delle patate e... altro	Dai problemi alle espressioni e viceversa
DATI E PREVISIONI	Tante strade conducono alla probabilità	Risultati possibili di semplici esperimenti. Assegnazione di probabilità ad un evento (classica, frequentista). Strategie per un percorso di apprendimento scientifico: prova o verifica di congetture
	L’Uomo di Vitruvio	
RELAZIONI E FUNZIONI	Mettiamo in equilibrio	Proporzionalità inversa
	Le camicie di Diofanto	Problemi ed equazioni di primo grado

PERCORSI PER TEMA
“MODELLIZZARE E RISOLVERE PROBLEMI”
II GRADO

NUCLEO	ATTIVITÀ	NODI CONCETTUALI
NUMERI	Il livello del mare	Ordine di grandezza, precisione e approssimazione
DATI E PREVISIONI	I grafici... questi sconosciuti	Grafici e loro tipologie
RELAZIONI E FUNZIONI	Risparmiare sulla bolletta del telefono	Funzioni lineari
NUMERI	Clessidre e bastoncini	Numeri primi, multipli e divisori. Linguaggio naturale e linguaggio algebrico
GEOMETRIA	Problemi di minimo nel piano	Isometrie per comprendere situazioni e risolvere problemi
NUMERI	Eredità e bagagli: dal linguaggio naturale al linguaggio algebrico	Linguaggio naturale e linguaggio algebrico
RELAZIONI E FUNZIONI	A piccoli o grandi passi verso l'algebra	Modelli e problemi
	Diete alimentari II	
	Concentrazione di un medicinale	
	Potere d'acquisto del salario	
	Rettangoli e fontane	Funzioni quadratiche
GEOMETRIA	Studenti in movimento	Modellizzazione di situazioni nel piano cartesiano; rapporti tra grandezze, pendenza
	Ognuno cresce a modo suo	Variazione di grandezze geometriche e relazioni tra di esse: funzioni
	Ombre e proporzionalità	Similitudini e teorema di Talete; modelli proporzionali e additivi
DATI E PREVISIONI	Un gioco con tre dadi	Eventi elementari; composti (spazio degli eventi). Variabili casuali: basi concettuali
	Stocastica e... legami intradisciplinari	



<http://formazionedocentipon.indire.it>

<http://risorsedocentipon.indire.it>

